

物理学実験 I
課題 1
運動と座標系

実験者番号 72
学籍番号 B9SB2032 木村佑斗

2022 年 1 月 31 日

目次

1	目的	3
2	原理	3
2.1	等価原理	3
2.2	回転座標系	3
2.3	等加速度運動する座標系	3
2.4	誤差評価	4
3	実験 1：画像解析の方法	4
3.1	方法	4
3.2	結果	5
3.3	考察	6
4	実験 2：回転座標系の運動	8
4.1	方法	8
4.2	結果	9
4.3	考察	10
5	実験 3：透過速度座標系の運動	10
5.1	方法	10
5.2	結果	10
5.3	考察	10
6	結論	11

1 目的

落下運動に注目して慣性質量と重力質量の比があらゆる物質で一定なのかどうかを実験により求め、誤差とともにその値を評価する。また、非慣性系のうちの1つである回転系の物体の運動についても画像解析をしてその特徴を明らかにする。

2 原理

本実験では地表を1つの慣性系とみなす。これは人間スケールでは十分良い近似である。

2.1 等価原理

一様重力場中の重力と、等加速度する系で生じる慣性力は区別がつかず、適当な加速度運動する系を選べば、その場の重力場を打ち消すことができる。これを等価原理という。

2.2 回転座標系

回転台上の小球の運動に注目するために、以下では2次元空間 (x, y) について述べる。ある慣性系の z 軸を中心に一定の角速度 ω で「反時計回り」に回転している座標系を考える。回転座標系における質点の位置を (x, y) とする。また、回転座標系での x 軸方向単位ベクトルを \hat{x} 、 y 軸方向の単位ベクトルを \hat{y} と表す。質点の慣性質量を m_I とすると、慣性力として

(i) コリオリ力

$$\mathbf{F}_{\text{cori}} = 2m_I\omega\dot{y}\hat{x} - 2m_I\omega\dot{x}\hat{y}$$

(ii) 遠心力

$$\mathbf{F}_{\text{cent}} = m_I\omega^2 x\hat{x} + m_I\omega^2 y\hat{y}$$

という2つの力が働く。理論的には回転台の回転の向きを逆にするとコリオリ力の向きも逆になる。従って、回転座標において、コリオリ力と遠心力以外の力を無視すると、運動方程式は慣性質量が消えるので

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x, \quad \ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y \quad (1)$$

2.3 等加速度運動する座標系

等加速度 α で運動する系において運動方程式は

$$m_I\ddot{z} = F - m_I\alpha$$

となる。一様重力場 g 中であれば $F = m_G g$ (m_G は重力質量) なので

$$m_I\ddot{z} = m_G g - m_I\alpha$$

となる。 α をうまく調節すると物体の加速度 \ddot{z} を0にすることができる。この時、慣性質量 m_I と重力質量 m_G について関係式

$$\frac{m_G}{m_I} = \frac{\alpha}{g} = k \quad (\text{const}) \quad (2)$$

経験的に、加速度 α の系である物体が加速度0になると、他の全ての物体も同様に加速度が0になる。これはあらゆる物体において(2)式が成り立つことを意味している。ということは同じ等加速度系においてあらゆる物質の慣性質量と重力質量の比 k は同じ値を示すはずである。実際に k が同じ値を示すかどうかは実験してみないとわからないことである。異なる材質の小球2個を用いて k の比が1からどれだけずれているかを測定する。そのずれを η とおくと、近似的に

$$\eta \simeq \frac{a_2 - a_1}{g} \quad (a : \text{加速度}) \quad (3)$$

で求めることができる。

2.4 誤差評価

ある物理量 $f = f(x_1, \dots, x_N)$ の誤差 Δf は

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2} \quad (4)$$

で求められる。次に η の誤差 $\Delta\eta$ を求めるための式を求める。まず、2点間の距離 d の誤差は

$$\Delta d = 3\sqrt{2}px$$

すると速度の誤差は $\Delta v = 90\sqrt{2}px/s$ となる。加速度 $a = 30(v_{i+1} - v_i)px/s^2$ の誤差は

$$\Delta a = 5400px/s^2 = \frac{5400}{8700}m/s^2 = \frac{18}{29}m/s^2$$

となる。従って、 $\eta = \frac{a_2 - a_1}{9.8}$ の誤差は

$$\Delta\eta = \frac{18 \times \sqrt{2}}{29 \times 9.8} \quad (5)$$

となる。

3 実験1：画像解析の方法

3.1 方法

回転台の真上にデジタルカメラを固定して、回転台上の方眼紙と小球の静止画を撮影した。この時回転台は回転させていない。

3.1.1 その1

まず初めに特に何も考えずに撮影した画像で、方眼紙のマス目の縦横の長さが、画像の外側に行くに従ってどのような変化をしていくかを測定した（この測定では画像の中心などは意識していなかった。すなわち、画像上のテキトウなマス目を選んでそのマス目から隣の外側のマス目へ、、、というように測定した）。

3.1.2 その2

次は、後の解析がしやすいように方眼紙のマス目の縦横の線が画像の縁の縦横と平行になるように撮影した（図1）。撮影した画像をペイントを用いてピクセル (px) 空間で座標を読み取った。まず、画像の歪みは回転対称性があると仮定した。画像の中心となる点すなわちピクセル空間では (1500,2000) を含む方眼紙のマス目を基準にした。まずそのマス目の縦横の px 空間上の長さを測った。次に、10マス分外側にあるマス目の縦横の長さを測定した。これらのデータをもとに、画像はどのような歪みがあるのかを解析し、その歪みを補正した上で、どのように小球の位置を読み取れば良いかを考察した。

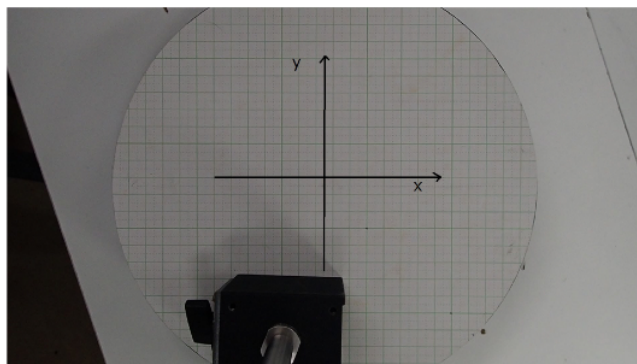


図1 座標の張り方

3.1.3 その3:位置決定に伴う誤差決定

こうして決定した小球位置決定方法に基づいて、共同実験者3人が独立に小球の位置を求めた。

3.1.4 その4:角速度の安定性

まずスマートフォンのストップウォッチ機能を用いてデジカメの動画において、フレーム間隔を求めた。次に回転台の上に磁石で回転台に固定できるマーカーを置き、回転台を回転させて角速度を測定した。静止画上のマーカーはとてもブレていて境界もはっきり読み取れない状態だったのでここでは中心と推定した位置を読み取ることにした。

3.2 結果

3.2.1 その1

マス目には縦横、すなわち2方向ある。それを x 方向と y 方向として、基準とするマス目の x 方向の長さを x_1 、 y 方向のマス目の長さを y_1 とし、そのマスの隣（より外側のもの）のマスの長さをそれぞれ x_2 、 y_2 とした。このように x_i 、 y_i を順次定義している。 x_i と y_i は px 空間上で三平方の定理から求めた。表1の Δx_i は $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ で定義した。 Δy_i も同様である。有効数字はピクセル（0~2000,0~1500）の4桁に合わせた。

表1 外側へ行くにつれて、マス目の縦横長さの変化

Δx_1	1.017	Δy_1	-2.982
Δx_2	1.982	Δy_2	0.9823
Δx_3	-2.953	Δy_3	3.000
Δx_4	-3.000	Δy_4	-4.006
Δx_5	3.051	Δy_5	2.092
Δx_6	3.051	Δy_6	0.9308
Δx_7	-0.02840	Δy_7	-2.023
Δx_8	-3.023	Δy_8	3.022
Δx_9	4.006	Δy_9	-2.022
Δx_{10}	1.086	Δy_{10}	0.09190
Δx_{11}	-3.000	Δy_{11}	0.9138
Δx_{12}	1.908	Δy_{12}	-2.982
平均	0.3415	平均	-0.2485

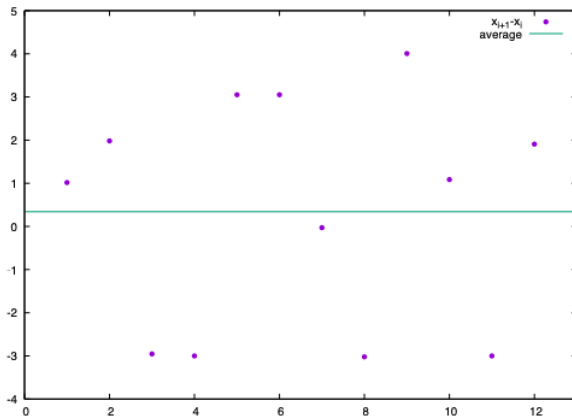


図2 ある方向1の外側への歪み方

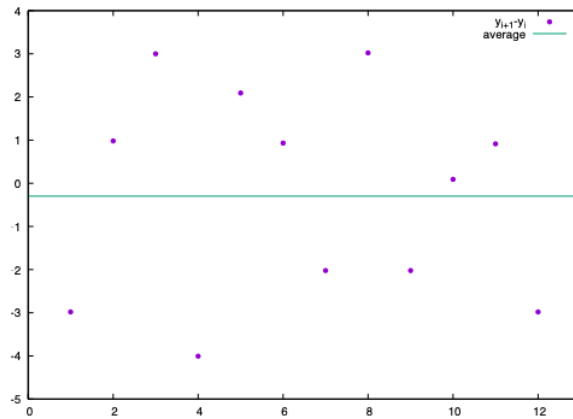


図3 ある方向2の外側への歪み方

3.2.2 その2

中心のマスの縦の長さは85ピクセル、横の長さも85pxだった。10マス分外側のマスの縦の長さ、横の長さはどちらも88pxだった。

3.2.3 その3:位置決定に伴う誤差決定

3人が独立に求めた小球の位置は表2のようになった。

表 2 誤差決定のための小球位置決定

	x 座標	y 座標
テレングト	1472	556
藪田	1470	557
木村	1469	555

3.2.4 その4:角速度の安定性

まずカメラのフレーム間隔は 1/30 秒だった。角速度を出す方法を説明する。まず回転台の中心をカメラの中心すなわち静止画の中心にセットした。静止画の中心はピクセル空間上で (1500,2000) である。ここを原点にするために、読み取ったピクセルから x 方向は 1500、 y 方向は 2000 だけ引く。そうすることで静止画の中心が原点となるような座標系で計算ができる。次に極座標系で角度 θ を求めるために、

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6)$$

と計算した。 θ の差を $\frac{1}{30}$ s で割ると角速度 rad/s が求まる。その結果は表 3 の通り。フレーム番号 36 を基準 ($t=0$) とした時の時刻も書いた。

表 3 角速度

フレーム番号	時刻 [s]	角速度 [rad/s]
36	0	7.7
37	0.033	7.8
38	0.067	7.1
39	0.10	7.8
40	0.13	7.1
平均		7.5
131	3.17	7.5
132	3.20	7.6
133	3.23	6.9
134	3.27	7.4
135	3.30	6.9
平均		7.3

3.3 考察

3.3.1 小球の位置決定方法

その 1 の測定結果の図 1・2 から、変化の仕方に有意な結果は得られなかった。これはそもそもピクセル空間の位置を読み取るときに人間による誤差が生じてしまうことと、解像度の限界があることから理解できる。すなわち、隣り合うマス目の長さの変化を個別的に測定することは誤差に上書きされてしまうために無意味であることがわかった。従って、変化の仕方はほとんど位置読み取り結果に影響を与えないことになる。このことから、変化の仕方は線形だと近似して良いと考えた。

画像の回転対称性の仮定から、画像の中心を原点とした極座標系を用いると歪みは動径 r の関数で表せる。中心のマス目の縦の長さが 85px で 10 マス外側のマス目の縦の長さが 88px だったので、1 マス外側に行くごとに 0.3px だけ引き伸ばされていることがわかる。平均的には 1 マスの縦の長さは 87 ピクセルであることから、1 ピクセルあたり $3/870=1/290$ px だけ引き伸ばされていることになる。これはその 1 の考察で歪みの仕方は線形であるという近似の下での考えである。

次に小球の位置決定の方法について考える。小球は立体なので画像における小球の中心が実際の回転台上での小球の中心の真下には一致しない。まず、このズレがどの程度なのかを計算する。使用したカメラの広角端の焦点距離は 25mm であり [1]、回転台とカメラの距離は約 30cm だったので、回転台と焦点との距離は約 27cm となる。状況は図 2 のようになる。

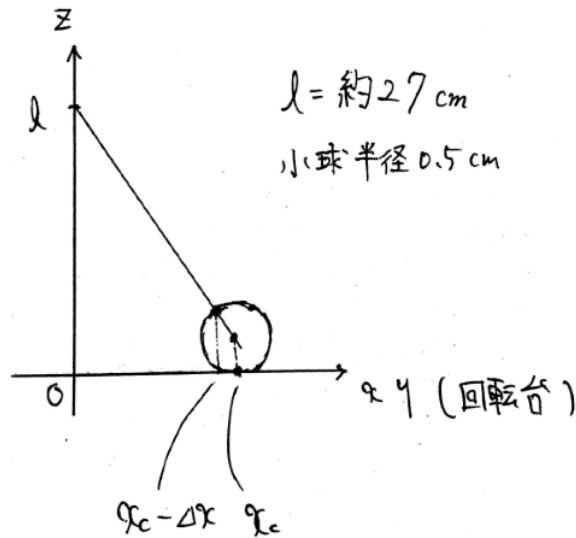


図4 小球の中心位置のずれ

x_c は実際の回転台上での小球の中心位置である。 l は焦点と回転台の距離である。図より小球の断面の方程式は

$$(x - x_c)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \quad (7)$$

画像での小球の中心は焦点と小球の中心を結ぶ直線と小球の縁との交点を回転台に射影した位置となる $(x_c - \Delta x)$ 。 $x_c - \Delta x$ を求めるために連立方程式を解くと、

$$x_c - \Delta x = \frac{1}{1 + (\frac{l-0.5}{x_c})^2} \left(x_c + \frac{(l-0.5)^2}{x_c} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(l-0.5)^2}{x_c^2} + 1} \right) \text{cm} \quad (8)$$

最もずれが大きくなるのは外側に小球があるときなので、 $x_c = 12\text{cm}$ とする（回転台が半径 12cm なので）。このとき $x_c - x$ は 11.78cm となる。すなわち最も外側に小球は 0.22cm だけずれる。 1cm あたり 87px なので、このときおよそ 19px ずれることになる。

小球が立体であることから生じるこの効果も歪みと同様に線形だと仮定する。最も外側にある小球は歪みと合わせると 16px だけ内側にずれることになる。そのため、小球の位置を読み取る時は動径方向外側に 16px だけプラスしてやれば良い。線形であることから、 px 空間における動径を r とすると、 $16\text{px}/(87\text{px} \times 12) = 0.015$ より、 r 上の位置に $0.015r\text{px}$ だけ r 方向にプラスしてやれば実際の空間での正しい小球の中心の位置が求まる。

次に、小球の中心の位置の決め方について考える。小球は広がりを持っている。中心を見ただ目で決めると精度が悪くなる。しかし、小球の境界線なら中心位置を決めるのに比べて精度は良くなるだろう。従って、私たちは小球の境界上の点を適当に3点決めて、それらのデータから中心座標を求めることにした。これは、円周上の点を3点選んだ時、それらうちの2点を結んだ線分の垂直二等分線の交点は円の中心になるという性質を用いている（図3）。

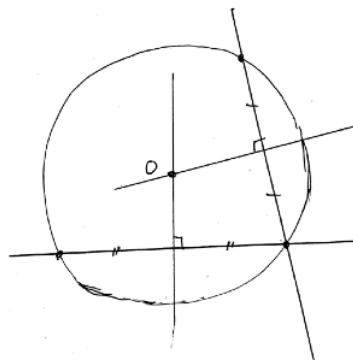


図5 円の性質

こうして求めた中心の座標に動径方向に 0.015px 足してやることで実際の回転台上での小球の中心の位置が求まる。表 2 より、最大誤差は 3px とする。すなわち求めた小球位置は常に ± 3 ピクセルの誤差を含んでいると考えることにする。

3.3.2 角速度の安定性

まず誤差評価をする。2次元極座標系における角度 $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ について、細かい計算は省くが、

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$$

$$\Delta x = \Delta y = 3\text{px}$$

より、

$$\Delta \theta = \frac{3\sqrt{2}\text{px}}{r[\text{px}]} \text{rad}$$

となる。角速度 $\omega = 30(\theta_{i+1} - \theta_i)$ より、

$$\Delta \omega = 90\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{r_{i+1}^2} + \frac{1}{r_i^2}} \text{rad/s} \quad (9)$$

で求めることができる。この式をもとに計算した誤差を表 3 に書き加えると、

表 4 角速度 (誤差付き)

フレーム番号	時刻 [s]	角速度 [rad/s]	誤差 [rad/s]
36	0	7.7	0.2
37	0.033	7.8	0.2
38	0.067	7.1	0.2
39	0.10	7.8	0.2
40	0.13	7.1	0.2
平均		7.5	0.2
131	3.17	7.5	0.2
132	3.20	7.6	0.2
133	3.23	6.9	0.2
134	3.27	7.4	0.2
135	3.30	6.9	0.2
平均		7.3	0.2

となる。ただし、この誤差は位置の読み取りの誤差から生じる誤差であって、回転台の系統誤差は含んでいない。平均値を見てみると 3 秒ほど時間が経過すると 0.2rad/s だけ角速度は減速することがわかる。また、仮に平均値をその時間帯の角速度の真の値とすると、角速度の測定値は台の系統誤差として $\pm 0.3\text{rad/s}$ を含んでいると考えることができる。すなわち角速度は 1 フレームあたり 0.02rad/s だけ減速し、さらに $\pm 0.5\text{rad/s}$ の誤差を含んでいることになる。

4 実験 2：回転座標系の運動

4.1 方法

回転台にカメラを固定して台を時計回りで回転させた後、台の上に小球をバウンドしないように放り投げて転がした。その様子を静止画で解析した。角速度遅めと速めの 2 通りで撮影した。

4.2 結果

まず、小球の運動が見える適当な静止画から小球の位置を読み取った結果は以下のようになった。図6においては小球はx軸正方向から負方向に運動した。図7においては初め渦を巻きながら最後はx軸負方向に大きく逸れていった。

次に回転台の脇にあるマーカの動きから回転の角速度を求めた。測定1では小球の軌道における最後の6点に対応する静止画のマーカから、角速度 ω は -2.54rad/s となった。角速度は1フレームあたり 0.02rad/s だけ遅くなることを使えば、各時点における回転台の角速度は求めることができる。測定2でも同様に角速度を計算した結果、図7における初めの時点での角速度は -6.06rad/s となった。ここでは回転台の回転の向きが時計回りなので角速度は負の値にしている。

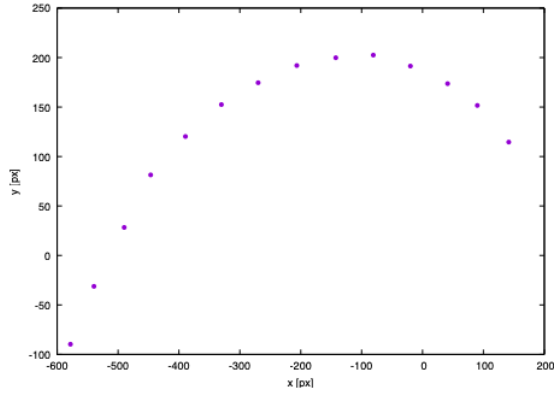


図6 測定1の小球の軌道

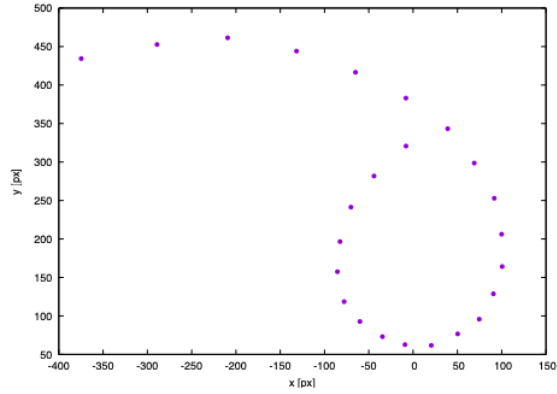


図7 測定2の小球の軌道

次に、(1)式の左辺を横軸に、右辺を縦軸に各時刻でプロットしたものが図8~11である。測定1ではあまり相関性は見られなかったが、測定2でははっきりと正の相関が得られた。誤差は誤差伝播の式から計算した。誤差は縦軸にだけ適用し、測定加速度には誤差は無いと仮定してる。

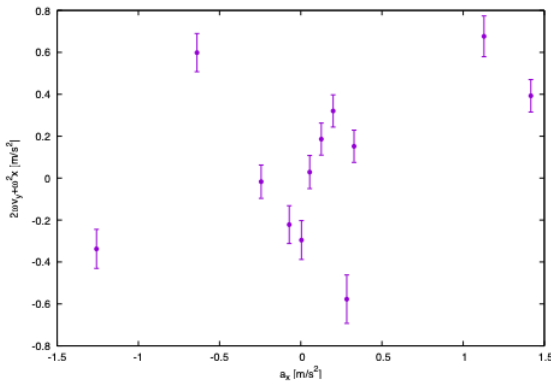


図8 測定1のx方向運動方程式の両辺比較

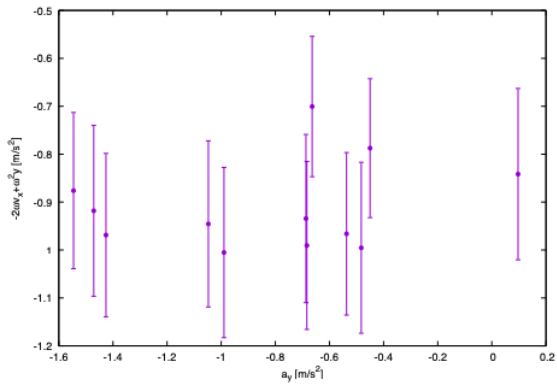


図9 測定1のy方向運動方程式の両辺比較

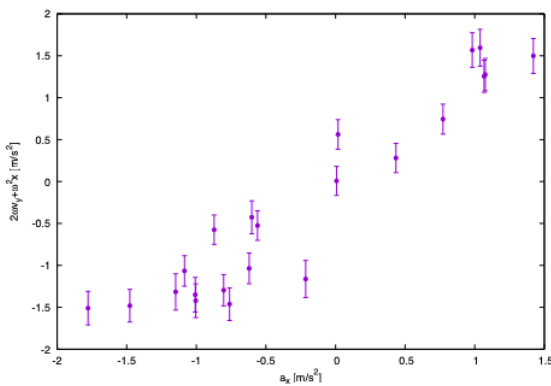


図10 測定2のx方向運動方程式の両辺比較

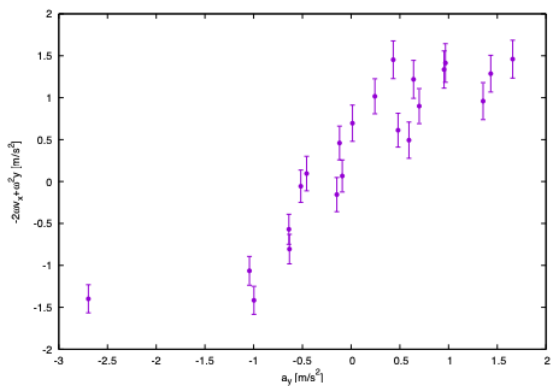


図11 測定2のy方向運動方程式の両辺比較

4.3 考察

測定 2 においては運動方程式の両辺で正の相関が得られたので、コリオリ力と遠心力で小球の運動は十分説明できている。測定 1 で運動方程式 (1) の両辺で相関が無い要因を考察する。まず、測定 1 と 2 での条件の違いを整理する。測定 1 は 2 に比べて角速度の大きさが小さい。コリオリ力と遠心力は角速度が大きければ大きくなる。すなわち、角速度が大きいほど運動方程式はコリオリ力と遠心力が支配的になり、その他の力が十分無視できるレベルになる。従って角速度が小さい測定 1 ではこの 2 つの力以外も考慮する必要がある。ただし、運動の向きを説明するだけならコリオリ力・遠心力だけで十分であることがわかる。すなわち、回転台は時計回りなので小球は反時計回りに渦巻き、遠心力によって原点から遠ざかるように動いている。

5 実験 3：透過速度座標系の運動

5.1 方法

箱の中にカメラを固定した。金属の小球とプラスチックの小球をおいて、箱を静かに落下させ、その様子をカメラで動画撮影した。その後、静止画にして実験課題 1 で決めたように小球の境界 3 点を読み取って、小球の中心位置を決定した。本実験では歪みと小球が立体であることは考慮しなかった（焦点距離がわからなかったため）。こうして求めた小球の軌道をもとに、小球の箱の中での加速度を求め、式 (3) の η を求めた。測定は 2 回行った。

5.2 結果

px 空間上の小球の軌道を図 8・9 に示す。グラフの下の点が時刻の早い点で、時間とともに上の方に動いていた。

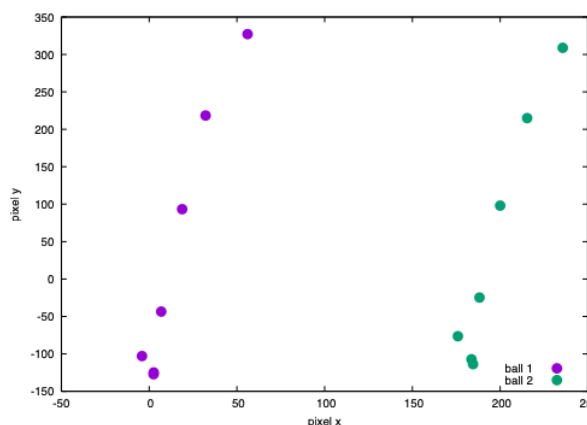


図 12 小球の軌道 1

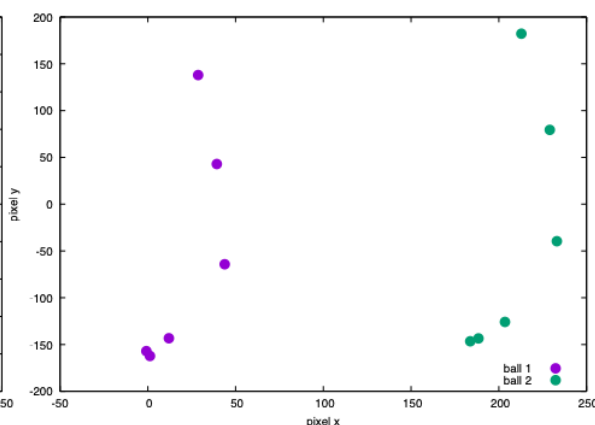


図 13 小球の軌道 2

5.3 考察

まず、この実験では箱が等加速度運動をしているときの小球の運動が必要である。そのため、箱は回転することは良くない。そのため、測定 1 回目と 2 回目でどちらが等加速度運動に近いのかを gnuplot でフィッティングをして χ^2 の値を比較して、1 に近い方の測定データを採用することにする。箱は手を離れた瞬間からしばらくは等加速度運動はせずに、しばらく時間がたつと、箱の重心が下側にあるので等加速度運動に近づくことになる。すなわち、データ点の最後の 3 点に注目し（加速度を求めるには少なくとも 3 点必要）、その 3 点を直線でフィッティングした。結果は図 10・11 となり、 χ^2 の値は測定 1 では 449、測定 2 では 3334 となった。従って、より等加速度運動に近いのは測定 1 である。以下では測定 1 のデータを用いて η を求める。

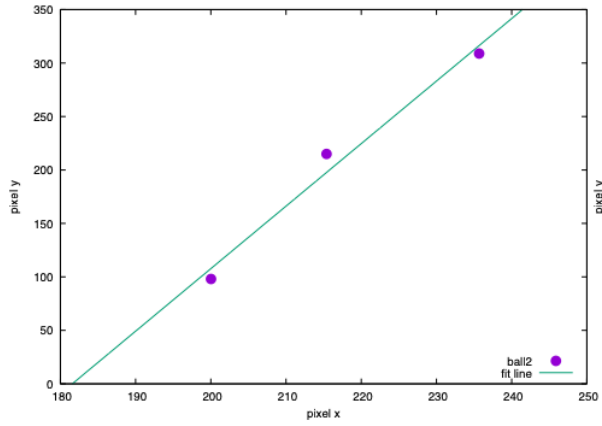


図 14 測定 1 (小球 2)

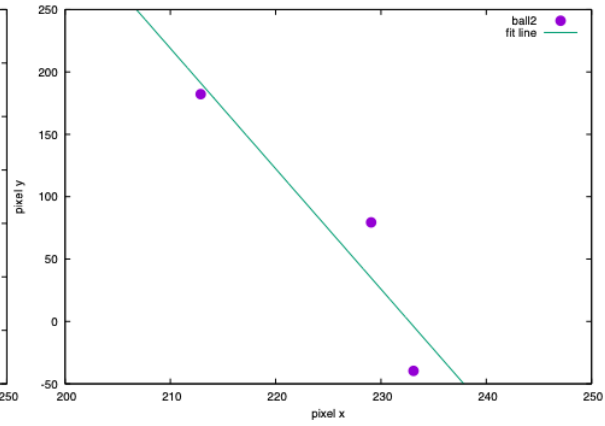


図 15 測定 2 (小球 2)

測定 1 のデータをまとめたものは表 5 である。

表 5 小球の運動

	x 座標	y 座標	距離 [m]	速度 [m/s]	加速度 [m/s ²]
小球 (金属)	19	93	-	-	-
	32	218	0.0145	0.434	-
	56	327	0.0128	0.384	-1.50
小球 (プラスチック)	200	98	-	-	-
	215	215	0.0136	0.407	-
	236	309	0.0110	0.331	-2.26

従って η は

$$\eta = \frac{-1.50 + 2.26}{9.8} = 0.0775... \simeq 0.08$$

となる。次に η の誤差 $\Delta\eta$ を求めるための式を求める。まず、2 点間の距離 d の誤差は

$$\Delta d = 3\sqrt{2}\text{px}$$

すると速度の誤差は $\Delta v = 90\sqrt{2}\text{px/s}$ となる。加速度 $a = 30(v_{i+1} - v_i)\text{px/s}^2$ の誤差は

$$\Delta a = 5400\text{px/s}^2 = \frac{5400}{8700}\text{m/s}^2 = \frac{18}{29}\text{m/s}^2$$

となる。従って、 $\eta = \frac{a_2 - a_1}{9.8}$ の誤差は

$$\Delta\eta = \frac{18 \times \sqrt{2}}{29 \times 9.8} \simeq 0.09$$

となる。以上より、 η は

$$\eta = 0.08 \pm 0.09$$

となる。1960 年代の Dike 達の実験の $\eta < 3 \times 10^{-11}$ は本実験で求めた η の誤差の範囲に入っている。

6 結論

回転座標系では慣性力であるコリオリ力と遠心力が働いていることが実験的に確かめられた。また、等価原理の正しさの指標である η を求め、誤差を評価したところ、より精密な実験で得られた η の値は本実験で求めた η の誤差の範囲内にあった。従って本実験で得た η の値は十分確からしいことになる。

参考文献

- [1] カメラの性能 <https://used.sofmap.com/r/item/>