

# 物理学実験 1 課題 2 電磁誘導

実験者番号 72 学籍番号 B9SB2032 木村佑斗

2022 年 1 月 28 日

## 1 目的

1831 年にファラデーが電磁誘導の実験に成功した。それにより近代の電気文明が発展した。自然科学は理論が主であり、実験はその論を検証するものというある意味では補助的な見方をしている者も少なくないだろう。しかし、電磁気学は実験から発展した分野の代表例である。エルステッドは電気と磁気の関連性を実験から見出し、ファラデーは電磁誘導の実験によって電磁気学を大きく進めた。すなわち実験あつての理論なのである。この見方をすると、本質は実験・現象であり、理論はあくまでもその現象をきれいに説明したものであるという補助的なものになる。だが、実験と理論は前輪と後輪のようなものであり、すなわち、どちらも後押しされるし、lead するときもある。本実験では実験から理論の立場で電磁気学において重要な電磁誘導という現象を考察する。具体的には、磁束の変化が起電力を生成することを確認、電気と磁気は相互変換であることを強調するために、単極誘導とその逆の原理による単極モーターを考察する。

## 2 原理

本実験では、全て電位差（起電力）を測定する。ガウスメーターは電位差とは関係ないように思えるが実際ホール素子を用いてホール電圧を測り、磁場 [Tesla] に変換している。すなわち本実験は全て電位差を使っている。では、電位差が生じる原因は何かというと、全てローレンツ力に還元できる。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

電子が磁場に対して速度を持つことによって電子は磁場から力を受ける。力を受けた電

子によってその後のマクロな現象が生じる。誘導起電力と単極誘導は電子がローレンツ力を受けることによって生じるものである。単極モーターは、電流は電子の流れと見れば、ローレンツ力で理解できる。

### 3 実験 1 電磁誘導の法則の検証

#### 1. 実験方法

まず、ネオジム磁石 1 個あたりの磁束密度と距離 (5mm から 50mm) の関係をガウスメーターで測定した。(机の上にネオジム磁石を置いて地面と垂直方向に沿って測定していくと手ぶれが大きくなってしまったので、それを軽減するためにネオジム磁石を図 1 のように机に置いて地面と水平方向に沿って磁束密度を測定した。手は机に置けるので手ぶれは軽減できた。) 次に、起電力測定に使用するオシロスコープ (岩通 DS-5110) で較正信号 (3V、1kHz) の矩形波を観測し、プローブの減衰比が 1 であることを確認した。オシロスコープの電圧は 1 目盛 50mV、時間は 1 目盛 20  $\mu$  sec に設定した。測定回路として図 2 のようにセットした。一番上の磁石の表面とコイルまでの距離を 23cm とした。その際、塩化ビニルパイプとネオジム磁石は地面と垂直になるように注意した。その後、ネオジム磁石の個数とコイル半径 (4 種類) を可能な組み合わせ全てで正負のピーク電圧とピーク間の時間差を測定した。

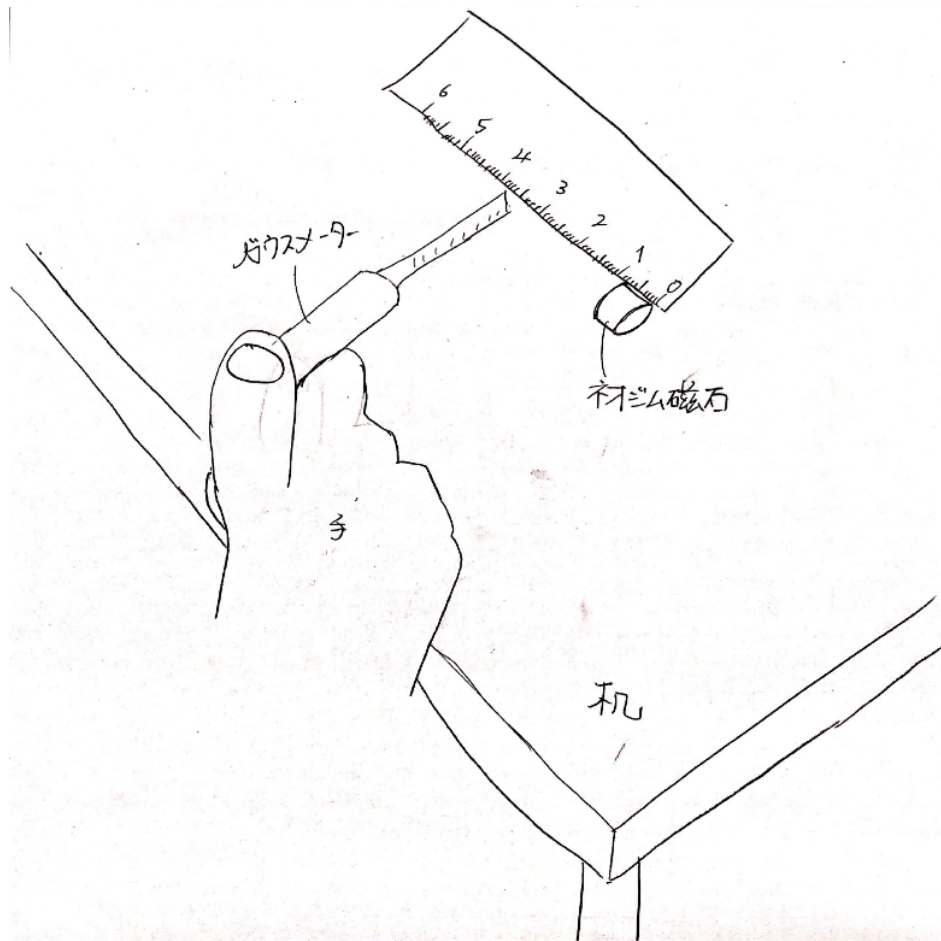


図1 ガウスマーターによるネオジム磁石の磁場測定

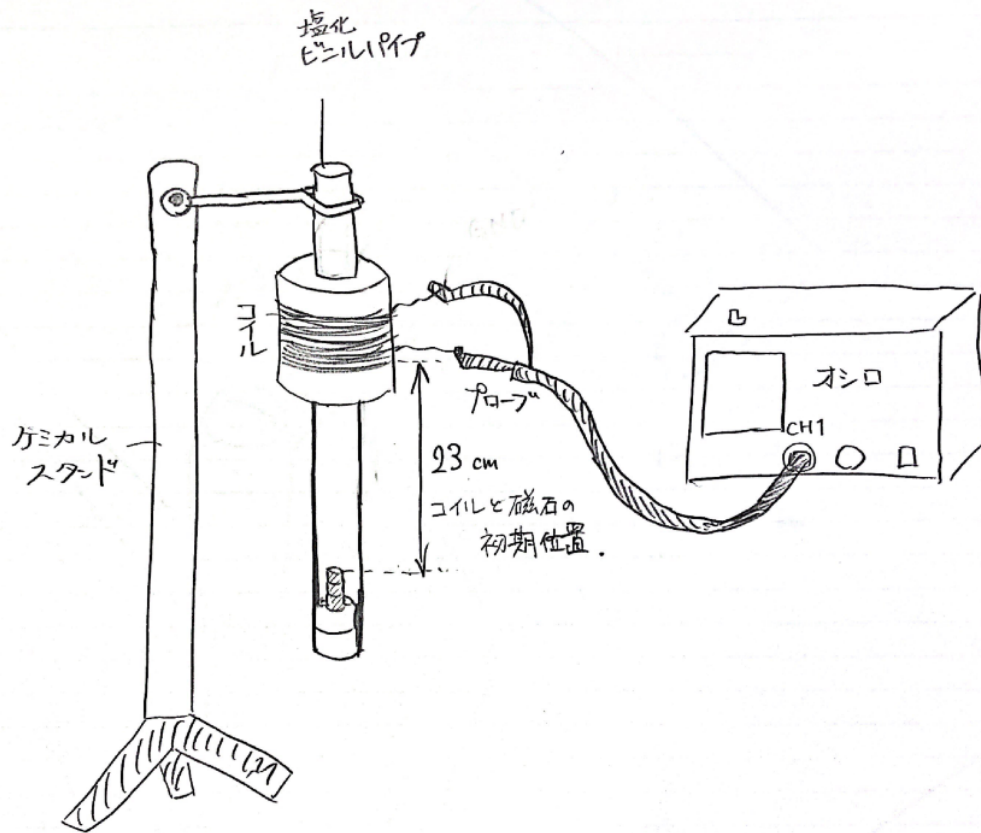


図2 コイル落下実験のセットアップ

## 2. 結果

ガウスメータによるネオジウム磁石 1 個当たりの磁束密度と距離の関係は表 1・図 3 のように右肩下がりになった。ただし図 3 のグラフは両対数グラフを用いた。図 2' は手書きのプロット図である。目分量で近似曲線を引き、傾きを求めたところ -2.3 になった。同様にエクセルを用いて近似曲線の傾きを調べると -2.3 となった。(エクセルには両対数グラフでの近似曲線という機能がなかったので、あらかじめ値を全てその自然対数に変換して普通の線形用の紙上にプロットして線形近似させた。)

距離 [mm]	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
磁束密度 [mT]	75.0	22.9	9.6	4.9	2.7	1.7	1.1	0.8	0.6	0.4

表 1: ネオジウム磁石の磁束密度と距離の測定結果

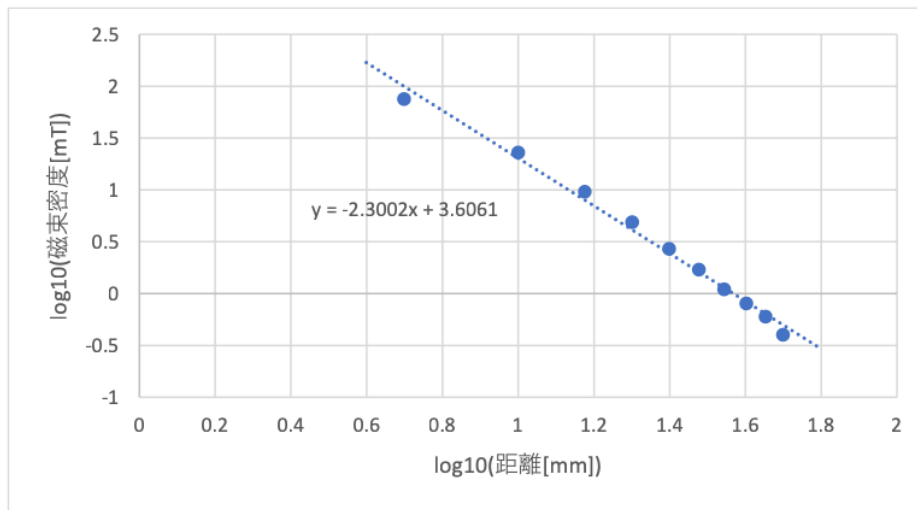


図3 エクセルによる近似曲線

オシロスコープでの測定時の波形は図3のようになった。実験を通して、ピーク間電位差とピーク間時間差のオーダーはそれぞれ 10[mV] 100[mV]、10[ms] 程度であった。

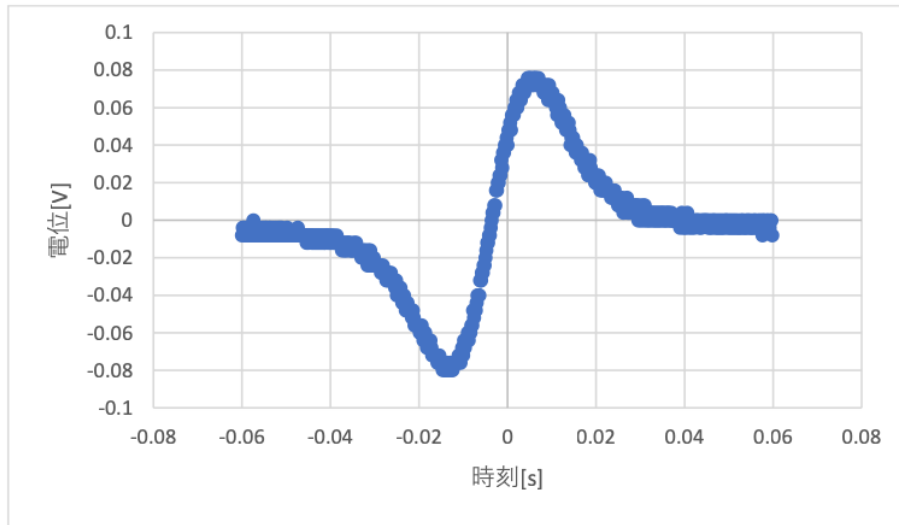


図4 オシロスコープで測定された波形の例

磁石の個数別のコイル半径  $R$  と起電力  $\Delta V$  の関係、コイル半径別の磁石の個数  $n$  と起電力  $\Delta V$  の関係はそれぞれ図3'・4' のようになった。 $R$ - $\Delta V$  は両対数グラフ用紙上に、 $n$ - $\Delta V$  は線形のグラフ用紙上にプロットした。図3' は右肩下がりの直線に、図4' は原点  $(0,0)$  を通る傾き正の比例の直線となった。

### 3. 考察

ここでデータの解析と考察を行う。まずコイルの落下実験において、オシロスコープの波形がなぜそのような形になるのかを考える。レンツ・ノイマンの法則をもとに考える。誘導起電力  $V$  を磁石からのコイルの高さ  $z$  の関数と見て、極値をとる  $z$  の値と極値の  $V$  の式を求める。本実験では、コイルの落下の時間が十分短く、コイルの落下速度の変化は無視できるとして、 $\frac{dz}{dt} = v$  は一定とする。

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{dz}{dt} \frac{d\Phi}{dz} \\
 &= -v \frac{d\Phi}{dz} \\
 &= \frac{3\mu_0 m N R^2 v z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

この式から V-z グラフを gnuplot で描いてみた。横軸は z で縦軸は V とみなす。  
 $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$  と定義して、g(x) をプロットした。

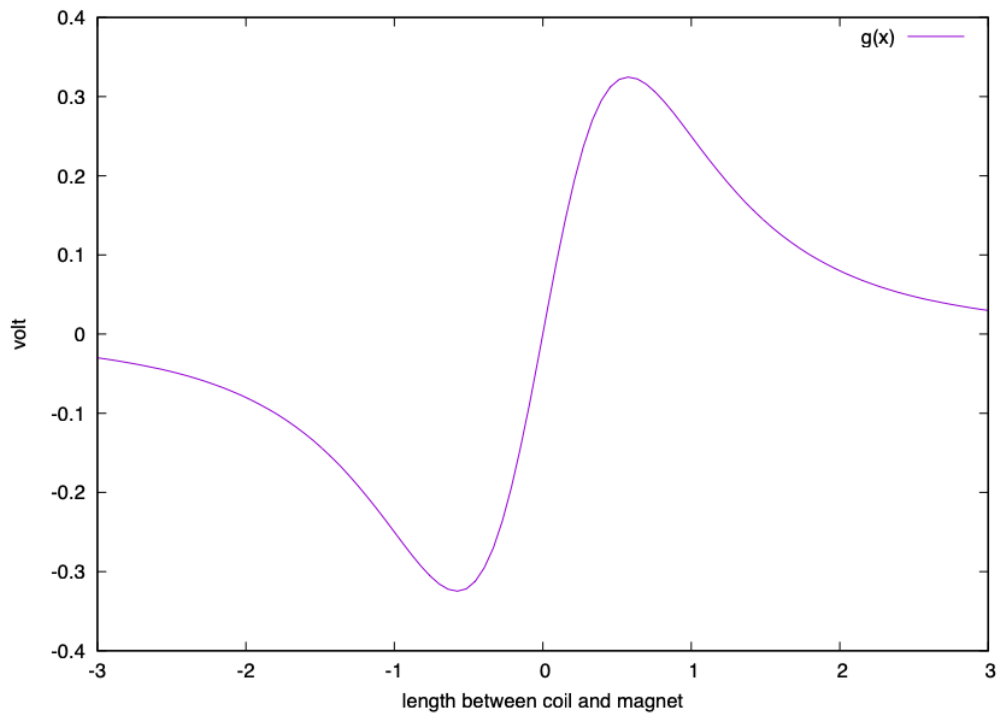


図5 式(2)のグラフの概形 (gnuplot)

この概形は図4のオシロスコープの概形と良く一致している。図4は横軸が時刻 t であるのが図4と5の違いである。横軸が z と t で異なるのにグラフの概形が同じになっているということは  $z \propto t$  であることになる。すなわち、ある定数 b を用いて  $z = bt$  となる。この b が速度 v である。つまり、横軸 t と z のグラフの概形がほぼ一致していることから、本実験は速度 v を十分一定とみなせることになる。さて、式(2)から、

$$-\frac{d\Phi}{dz} = \frac{3\mu_0 m N R^2 v z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \quad (3)$$

次に  $V$  を  $z$  で微分して  $V$  の  $z$  における極値を求める。式 (3) を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= -\frac{d^2\Phi}{dt dz} \\ &= \frac{d}{dt} \left( -\frac{d\Phi}{dz} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{3\mu_0 m N R^2 v z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3\mu_0 m N R^2}{2} \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{3\mu_0 m N R^2 v (R^2 - 4z^2)}{2(R^2 + z^2)^{7/2}} \end{aligned} \quad (4)$$

分母は常に正なので、" $V$  が極値をとる  $\Leftrightarrow R^2 - 4z^2 = 0$ " であるから、 $z = \pm R/2$  で  $V$  は極値をとるとわかる。この時の  $V$  の式は式 (2) に  $z = \pm R/2$  を代入して、

$$\begin{aligned} V_{max}, V_{min} &= \frac{3\mu_0 m N R^2 v (\pm \frac{R}{2})}{2(R^2 + (\pm \frac{R}{2})^2)} \\ &= \pm \frac{24\mu_0 m N v}{25\sqrt{5}R^2} \end{aligned} \quad (5)$$

すなわち、ピーク電圧差  $\Delta V$  は、 $\Delta V = \frac{48\mu_0 m N v}{25\sqrt{5}R^2}$  となる。このピーク電圧差の式は実験結果とつじつまが合う。コイル半径が大きくなれば起電力は小さくなる。この事実の直感的説明は図5のように考えればよい。重要なことは磁束の大きさではなく、磁束変化の大きさである。磁石に対して極端に大きなコイルを考えると、実験室のオーダーの距離内では、磁束の変化はほぼ無い。一方、コイルが小さければ、実験室オーダーの距離内でも磁束密度変化が磁束変化に影響する。磁束密度はコイルに依らず距離依存している。これが、コイル半径が大きくなると起電力が小さくなることの直観的説明である。



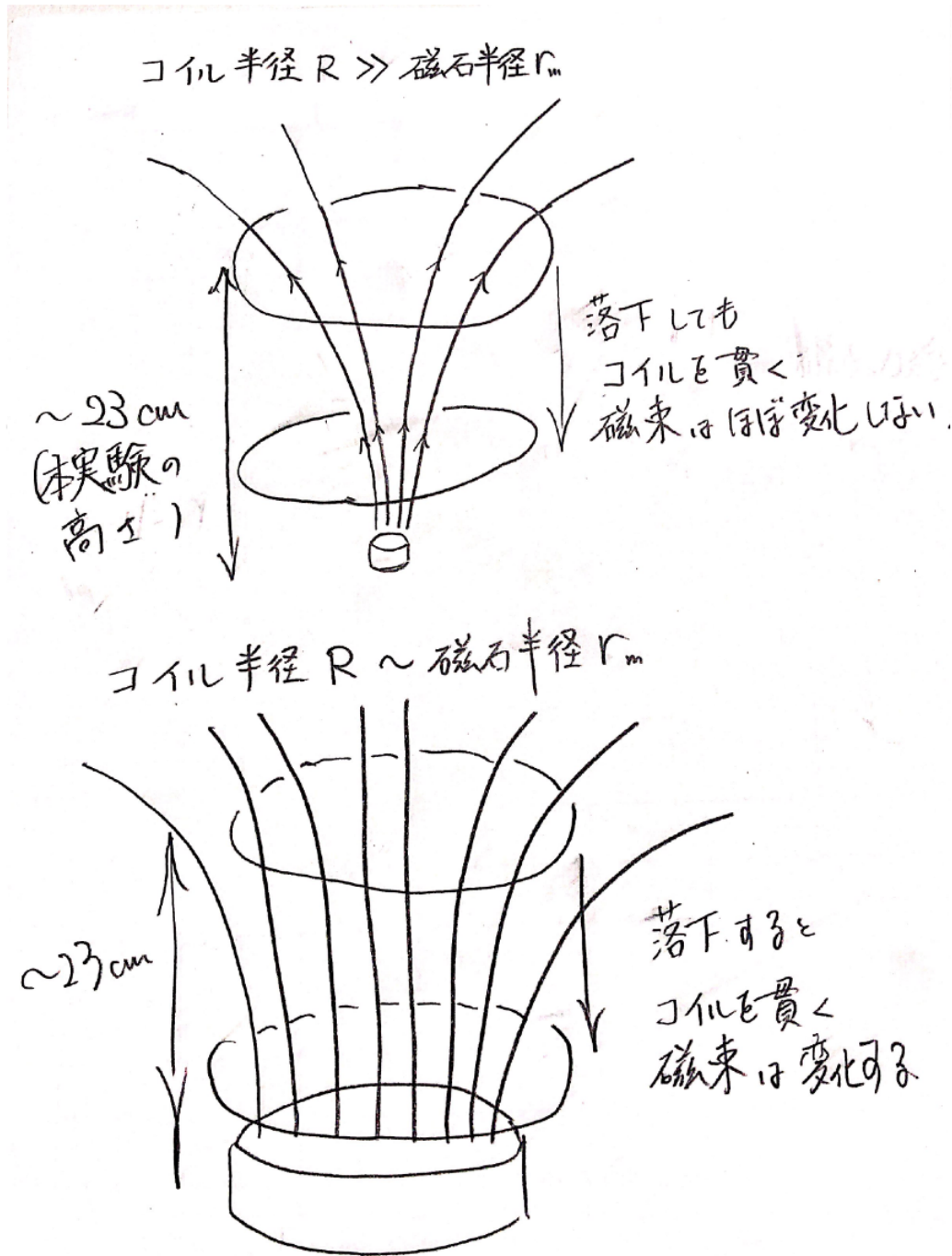


図6 落下実験の直感的図

ピーク間の時間差とピーク間距離から速さを求めた結果が下の表である。計算式は

$v = \frac{R}{\delta t}$  である。

速度 [m/sec]	磁石の個数					
コイル半径 [mm]	1	2	3	4	5	平均
20	1.21	1.28	1.56	1.28	1.25	1.32
30	1.92	1.83	1.74	1.74	1.63	1.77
37	1.96	1.78	1.89	1.89	1.85	1.87
54	2.21	1.85	2.21	1.99	2.11	2.07
平均	1.83	1.68	1.85	1.72	1.71	1.76

表 2: コイルの落下速度  $v$  [m/sec]

この結果を見ると、落下速度は磁石の個数とは相関は無いが、コイル半径（またはトイレットペーパーの質量？）とは相関があるように見える。コイル半径が大きいと落下速度は大きくなっている。これは、コイル半径が大きいすなわちトイレットペーパーの質量が大きいことで空気抵抗に抗う力が大きくなって落下速度も大きくなっているだけだと考える。

次にコイル落下実験から磁気双極子モーメントを求める。式（5）を変形することで磁気双極子モーメント  $m$  を求められる。結果が下の表である。

コイル半径 [mm]	20	30	37	54	平均
磁気双極子モーメント [ $A \cdot m^2$ ]	0.297	0.330	0.369	0.371	0.341

表 3: コイル落下実験から求めた磁気双極子モーメント  $m$  [ $A \cdot m^2$ ]

最後に、ガウスメーターで測定したネオジウム磁石の磁場の値から  $m$  を求める。磁石の中心軸上では次の式が成り立つ。これは考察問題 B の問題 2 で求める式 (20) で  $\theta=0$ 、 $r=z$  として絶対値をとった式である。

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \quad (6)$$

この式の両辺の常用対数を取ることで、本来ならば図 2' や図 3 のグラフの傾きは -3 になるはずである。しかし、実験結果では傾きは -2.3 であった。今の逆の議論をすると、実験結果からは、磁場  $B$  は距離  $z$  の -2.3 乗に比例することが導ける。理論式が既知でなければ、-3 乗則は知らないので使えない。あえて -3 乗則を用いる

なら、どのデータ点を使うかによって  $m$  の値が大きく変わってしまう。y 切片を用いるとしても、両対数グラフの原点の取り方 (1mm を原点にするか 1m を原点にするか) によっても  $m$  の値が変化する。また、折衷案として理論式で-3 乗を-2.3 乗にしたら、データ点に依らない  $m$  を求められると考えたが、この場合  $m$  の次元がおかしくなってしまう。better な方法がとうとう思いつかなかったので、原点を (1mT,1mm) としたときの y 切片の値から  $m$  を求めることにした。y 切片の値は (1mm,  $10^{3.6}$  [mT]) なので、これを式 (6) に代入すると、 $m=0.0199[A \cdot m^2]$  となった。落下実験で求めた  $m$  のオーダーとは 1 桁ずれている。この原因を考える。下図は 0mm(接触),1mm,2mm,3mm,4mm と 5mm から 5mm 刻みで 50mm まで再度 Gauss 計で測定したときのデータである。

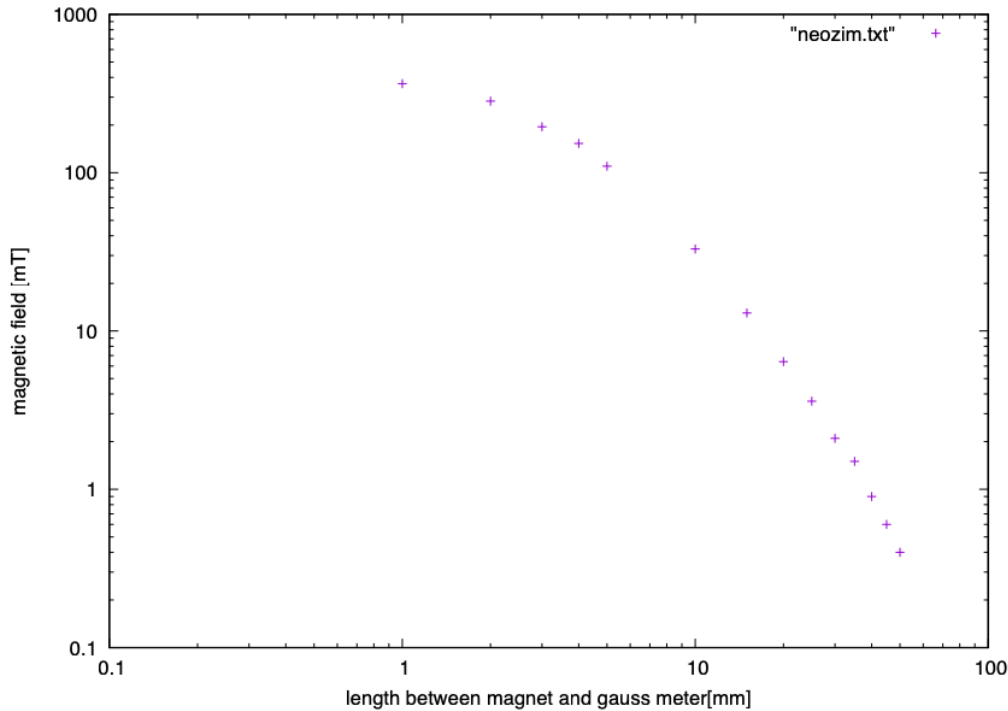


図7 磁石近傍の 5 点を追加した、Gauss 計の再実験

この図を見ると、Gauss 計の極近いときは両対数グラフ上でも直線ではないことがわかる。先ほどは 5mm から 50mm のデータ点を用いて 1mm の磁場の値を求めて  $m$  を計算した。実際の測定では 1mm のときの磁場は 444mT であった。この値と-3 乗則の理論式を用いて  $m$  を計算すると、 $0.222 \times 10^{-2}[A \cdot m^2]$  となって、今度は 2 桁ずれていた。結局、どの値が最も確からしいかは本レポート提出期

限内に結論付けることはできなかった。

## 4 実験 2 単極誘導と単極モーター

### 1. 実験方法

ロータリーエンコーダ（単極誘導発電装置）の出力をオシロスコープの CH1 に接続し、銅円盤の中心と側面の電位差をテスターに接続した。CH1 ではロータリーエンコーダの磁石・銅円盤の角速度  $\omega$ [Hz] を測定した。ロータリーエンコーダを回転させる人はテスターで起電力を見ながら回した。起電力を安定させたと判断した時、オシロスコープの stop ボタンを押す人に合図を出して stop ボタンを押した。この測定を、A「銅円盤のみ回転」、B「磁石のみ回転」、C「両方回転」の3つのパターンでそれぞれ複数回測定した。実験前に、A と C の時に起電力が発生すると予想した。理由は、磁石が中心軸方向に回転対称生を持っており、それゆえ磁石を中心軸方向に回転させても磁場は変化せず、銅円盤を回転させなければ、銅円盤内の自由電子は磁場に対して速度ゼロだと考えたからである。続いて、乾電池・鉄釘・ネオジウム磁石・導線を使って単極モーターを回した（図5）。

### 2. 結果

ロータリーエンコーダを用いた単極誘導の実験の結果は下表のようになった。また、パターン B「磁石のみ回転」の時は任意の角速度で起電力は0であった。

起電力 [mV]	1.4	1.2	2.0	0.8	2.6
角速度 [rad/s]	33.8	31.1	50.7	18.6	69.8

表4 銅円盤のみ回転させた時の起電力と角速度

起電力 [mV]	1.9	1.2	1.6	2.4	0.9
角速度 [rad/s]	51.1	27.2	39.5	60.4	22.0

表5 両方回転させた時の起電力と角速度

これらを線形のグラフ用紙にプロットしたものが図5'である。角速度と起電力は比例関係にあり、グラフは右肩上がりとなった。表計算ソフト（エクセル）を用いてパターン A とパターン C、さらに A と C を重ねてプロットし、線形近似させた

グラフが次の図8・9・10である。

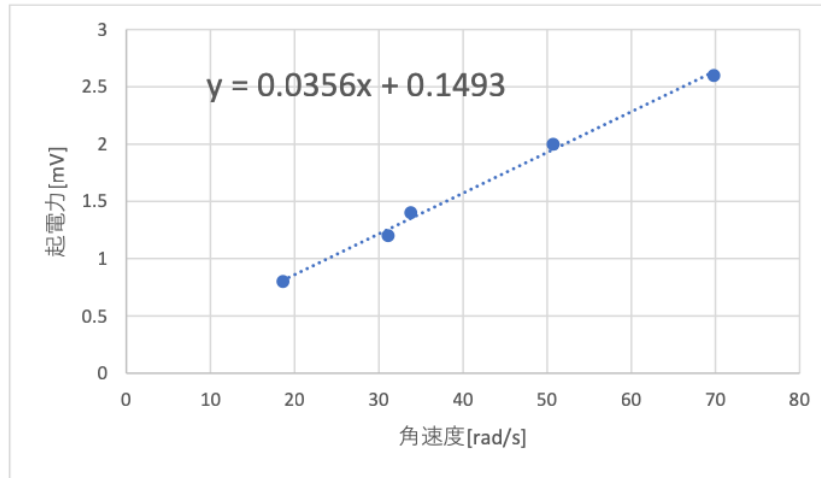


図8 円盤のみ回転

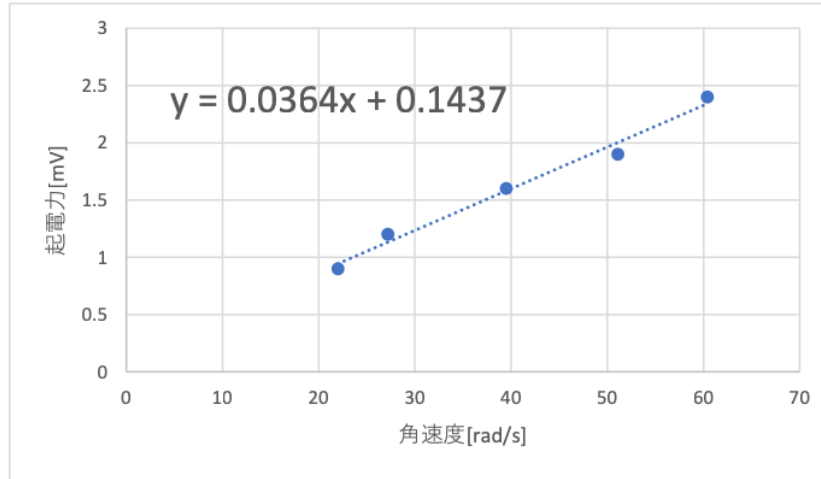


図9 両方回転

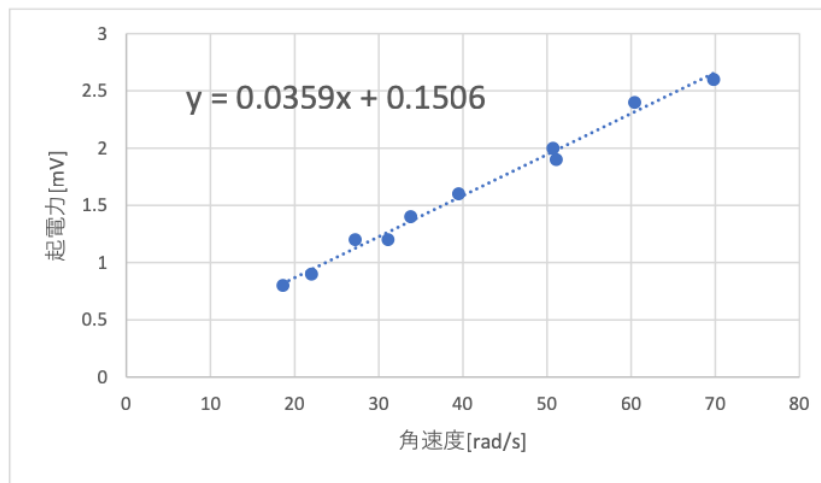


図10 A・C同時フィット

また、銅円盤の抵抗をテスターで測定した結果は  $0.1\Omega$  だった。

単極モーターは磁石の側面に導線を接触させることで回転した。磁石の底面の中心に銅線を接触させても回転せず、火花が散ることもあった。また、磁石の向きを反対にした場合と、電池の正負を逆にした場合のいずれの場合も回転方向は逆向きになった。使える乾電池が1つだけだったので乾電池の数による回転の速さの変化は確認できなかった。磁石の個数を変化させても回転の速さの変化は肉眼では確認できなかった。

### 3. 考察

実験前の自分の予想は正しかった。図8～10のグラフから、単極誘導において起電力は角速度の一次関数で表すことができそうである。角速度が0のときは自明に起電力は0なので角速度と起電力は比例していると考えられる。実際、測定中起電力の値をテスターで読み取るときテスターの値のぶれの幅は明らかに  $0.15\text{mV}$  よりも大きかった。したがって、誤差の範囲内で、誘導起電力は角速度に比例しているといえる。しかし、円盤のみ回転のときも両方回転のときもどちらも  $y$  切片が約1.4で、何か意味を持っていそうである。大雑把な考え方になってしまうが、起電力は電力に比例する。角速度は単位時間当たりの回転エネルギーに比例する。電力の原因は回転であるが、回転の原因は実験者のロータリーエンコーダにした仕事である。実験者のする仕事率を大きくすると、単位時間当たりの回転エネルギーが大きくなり、電力が大きくなる。すなわち、角速度が大きくなれば起電力も大きくなる。この過程で発生するエネルギーは電氣的なジュール熱、回転エネルギーの他にも摩擦による熱エネルギーや音のエネルギーがある（他にもあるかもしれない）。実験者の仕事を大きくすると、音エネルギーは大きくなる。しかし、摩擦による熱エネルギーはどうだろうか。動摩擦力は物体の材質や、物体同士にかかる垂直抗力には依存するが物体同士の相対速度には依存しない。すなわち、同じロータリーエンコーダを使用している以上、垂直抗力と材質は変化していないので、摩擦によって発生するエネルギーは実験者の仕事率の大きさに依らず一定である。これらのエネルギーで保存則を立てると、実験者の仕事率に依らないのは摩擦による熱エネルギーのみであり、この一定の項があることが  $y$  切片がゼロでない理由だと考えた。さて、単極誘導現象は、レンツ・ノイマンの法則で説明できないように思われる。本実験の回路では常に  $\frac{d\Phi}{dt} = 0$  であり、起電力が発生するという実験事実と一致しないためである。レンツ-ノイマンの法則は現象をマクロな視点で見たものである。よって、ミクロな視点で現象を考える。起電力とは回路内の電位差のことである。電位差のもとには電荷である。回路中の電荷は銅円盤内の自由電子である。まず、磁

石固定の銅円盤回転の場合を考える。磁場中で電荷が磁場に対して速度を持つと、その電荷にはローレンツ力がかかる。その結果、自由電子は銅円盤の中心または外側に移動する。どちらに移動するかは、磁場の向きと回転の方向に依存する。こうして電荷が移動しようとするだけで回路には起電力が生じる。次に磁石だけ回して、銅円盤は固定した時を考える。本実験で用いたロータリエンコーダの磁石は中心軸方向に回転対称性がある。よって、磁石を回転させても磁石によって発生している磁場は変化しない。つまり、銅円盤を回転させない限り、銅円盤内の自由電子は磁場に対して速度を持つことはないので、当然ローレンツ力も受けず、起電力は生じない。両方回転させたときは上の2つのパターンの説明を組み合わせることで理解できる。

続いて、単極モータのメカニズムについて考える。実験結果から、磁石の外側から中心（中心から外側）に電流を流すことが肝心だとわかる。電流とは自由電子の流れである（今は正孔のことは考えないことにする）。磁石の外側から中心に磁石内部の電子が移動する際、その電子は磁石内部の磁場によってローレンツ力を受ける。仮に磁石の上面がN極で、“電流”が中心から外側に流れていると、電子は外側から中心に移動している。磁場は鉛直方向上向きである。このとき、原理の式(1)から、電子は上から見て時計回りの力を受ける。多数の磁石内部の電子がこのローレンツ力を受けることで、磁石自身が時計回りに回転する。磁極の向き・電流の向きを反対にすると、回転の方向も逆になる。また、この理論から、電流の向きと回転方向がわかれば磁極もわかる。磁石の中心から電流を流しても回転しなかった理由は、磁場の向きと電子の速度が平行で、その外積は0になるからである。

## 5 考察問題 A:実学的な推定

### 1. 問題1

1.

テキストのヒントに従って、巻き数  $N=50$  として計算した。三角形は2つあるが、形が対称なので1つのみに注目して電力を見積もる。オシロスコープの波形から三角形の底辺は  $\frac{3\delta t}{2}$ 、高さは  $\frac{\delta V}{2}$  とした。最終的に、次のような式になった。電力  $P[W]$  は、

$$P = \frac{3\delta t \delta V^2}{64L} \quad (7)$$



$$L = \frac{\mu_0 R N^2}{2} \quad (8)$$

コイル落下実験における各条件での電力は下の図の通りになった。コイル半径が大きいほど電力は小さく、磁石の個数が多いほど電力は大きい。コイル半径が大きいと電力が小さいというのは、実験1の考察の部分で述べた、「コイル半径が大きいと誘導起電力が小さい」ということに起因する。

電力 [W]	磁石の個数	1	2	3	4	5
	20	0.0583	0.215	0.552	0.738	1.11
	30	0.0224	0.0884	0.175	0.307	0.492
	37	0.0124	0.497	0.105	0.198	0.273
	54	0.00311	0.00930	0.0238	0.0419	0.0654

表 6: コイル落下実験の発電量 (電力 [W])

次に変換効率を求める。基準面をネオジウム磁石の下  $R/2$ [mm] として、位置エネルギーを求め、それをピーク間の時間差で割って上の電力と比較する。下の表は各コイルの単位時間当たりの位置エネルギー変化である。速度は一定として考えているので運動エネルギーは一定である。したがってコイルの力学的エネルギーの減少分は位置エネルギーの減少分に等しく、それと電力の比で変換効率が見積もれる。

コイル半径 [mm]	質量 [g]	単位時間当たりの位置エネルギー変化 [W]
20	10	1.29
30	34	5.90
37	81	14.9
54	156	31.6

表 7: コイル別の単位時間当たりの位置エネルギー変化

これらをもとに、変換効率を計算した結果が下の表である。

変換効率 [%]	磁石の個数	1	2	3	4	5
	20	4.54	16.7	43.0	57.5	86.9
	30	0.380	1.50	2.96	5.21	8.35

	37	0.0834	0.334	0.708	1.33	1.83
	54	0.00987	0.00295	0.00754	0.0133	0.0207

表 8: コイル別・磁石の個数別の変換効率

電磁誘導の変換効率の文献を探してみたが、具体的な値を述べているのは見つけれなかった。コイル半径 20mm のときに変換効率が大きい。測定精度の問題か、解析が大雑把すぎるかのどちらかである。

2.

単極誘導実験における電力を見積もる。単極誘導時に発生した電流は直流電流であり、その時の電力は  $P = VI = V^2/R$  (R:抵抗) で求められる。テスターで抵抗を測定したところ  $0.1\Omega$  だった。角速度別の電力の値を表にした。

角速度 [rad/s]	18.6	22.0	27.2	31.1	33.8	39.5	50.7	51.1	60.4	69.8
電力 [mW]	0.006	0.008	0.014	0.014	0.036	0.025	0.04	0.036	0.057	0.067

表 9: 角速度別の電力 [mW]

コイル落下実験に比べて、電力が小さいことがわかる。しかし、コイルを落下させるよりもロータリエンコーダのハンドルを回した時の方が、実験者はより多くの仕事をしているはずである。このことから、装置の問題点もあるが、コイル落下よりも単極誘導の方がエネルギー変換の効率は悪いと考える。実際、ロータリエンコーダは音が大きく、音のエネルギーに変換される割合が高いのだと考えた。

## 6 考察問題 B:理論電磁気学への還元

### 1. 問題 1

(1) レンツ・ノイマンの法則  $V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  と磁気双極子モーメント  $m$  が作る磁場  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta)$  から、N 回巻きのコイルが張る面 S 上で定義される磁束  $\Phi$  と誘導起電力 V を求める。面積分におけるガウス面 S は半径 r の球面の一部 (天頂角  $0 < \theta' < \theta$ ) とする。また、r と z を  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ 、 $\sin \theta = \frac{R}{r}$  で定義する。まず、N 回巻きであり、 $d\mathbf{S} = d\mathbf{e}_r dS$  であるから、

$$\begin{aligned}
\Phi &= N \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\theta d\theta' r^2 \sin \theta' \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_r \\
&= \frac{\mu_0 m N}{r} \int_0^\theta d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \\
&= \frac{\mu_0 m N}{r} \left[ \frac{\sin^2 \theta'}{2} \right]_0^\theta \\
&= \frac{\mu_0 m N \sin^2 \theta}{2r} \\
&= \frac{\mu_0 m N R^2}{2r^3} \\
&= \frac{\mu_0 m N}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{9}$$

となり、磁束の式が導けた。次に起電力  $V$  を求める。 $\Phi$  を時間微分すればよく、速度は一定とみなせるので、

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{d\Phi}{dt} \\
&= -\frac{dz}{dt} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right) \\
&= -\frac{\mu_0 m N v R^2}{2} \left( -\frac{3}{2} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{5/2}} 2z \right) \\
&= \frac{3\mu_0 m N v R^2 z}{2(R^2 + z^2)^{5/2}}
\end{aligned} \tag{10}$$

となり、起電力も導出できた。

(2) ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  と磁場  $\mathbf{B}$  は次式で結ばれる。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{11}$$

レビ・チビタの記号を用いると、ベクトルポテンシャルと磁場の第  $i$  成分 ( $i=1,2,3$ ) は次のように表される。

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \epsilon_{ijk} m_j x_k \tag{12}$$

$$B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \tag{13}$$

したがって磁場  $B_i$  は、

$$\begin{aligned}
 B_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \\
 &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \epsilon_{klm} m_l x_m \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} m_l \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_m}{r^3}
 \end{aligned} \tag{14}$$

ここで、レビ・チビタの記号の性質から、クロネッカーのデルタを用いて、

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} &= \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \\
 &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}
 \end{aligned} \tag{15}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 B_i &= \frac{\mu_0}{4\pi} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) m_l \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_m}{r^3} \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( m_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{r^3} - m_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3} \right)
 \end{aligned} \tag{16}$$

$\frac{x_i}{r^3}$  の微分は、積の微分法と合成関数の微分法により、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{r^3} &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \frac{1}{r^3} + x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r^3} \\
 &= \frac{\delta_{ij}}{r^3} + x_i \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{1}{r^3} \\
 &= \frac{\delta_{ij}}{r^3} + x_i \frac{x_j}{r} \left( \frac{-3}{r^4} \right) \\
 &= \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5}
 \end{aligned} \tag{17}$$

したがって、総和規約に注意すると式 (13) の第1項はゼロになるので、

$$\begin{aligned}
 B_i &= -\frac{\mu_0 m_j}{4\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( -\frac{m_i}{r^3} + \frac{3x_i}{r^5} (m_x x + m_y y + m_z z) \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

さらに、磁気双極子モーメント  $\mathbf{m}$  が、 $\mathbf{m} = (0, 0, m)$  なので、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} \frac{3xz}{r^2} \\ \frac{3yz}{r^2} \\ 3z^2/r^2 - 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 3 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ 3 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ 3 \cos^2 \theta - 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{19}$$

ただし、最後の式変形で3次元デカルト座標系から3次元極座標系に変数変換した。3次元極座標系で  $r$  方向と  $\theta$  方向の単位ベクトルはそれぞれ

$$\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (20)$$

$$\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (21)$$

となるので、最終的に磁場  $\mathbf{B}$  は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta (\sin \theta \cos \phi) + \sin \theta (\cos \theta \cos \phi) \\ 2 \cos \theta (\sin \theta \sin \phi) + \sin \theta (\cos \theta \sin \phi) \\ 2 \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。次に、コイル  $C$  が張る面  $S$  でこの磁場を面積分して磁束  $\Phi$  を求める。

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^R dR' \int_0^{2\pi} d\phi R' \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \int_0^R dR' \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R'}{r^3} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \int_0^R dR' \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R'}{(R'^2 + z^2)^{3/2}} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (\because r = \sqrt{R'^2 + z^2}) \\ &= \frac{\mu_0 m}{2} \int_0^R dR' \frac{R'}{(R'^2 + z^2)^{3/2}} \left( \frac{3z^2}{R'^2 + z^2} - 1 \right) \left( \because \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{R'^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{\mu_0 m}{2} \int_0^R dR' \frac{(R'^2)' (R'^2 + z^2)^{3/2} - R'^2 ((R'^2 + z^2)^{3/2})'}{((R'^2 + z^2)^{3/2})^2} \\ &= \frac{\mu_0 m R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (23)$$

コイルが  $N$  回巻きなので結局、

$$\Phi = \frac{\mu_0 m N}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (24)$$

となる。

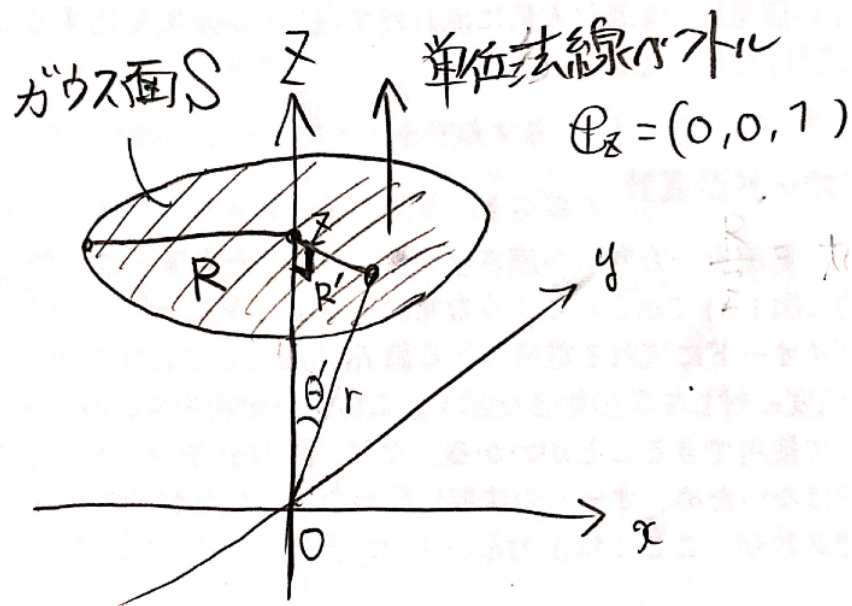


図 11 コイル C が張る面 S

## 2. 問題 2

磁気力線を実在の存在だとみなし、「ある回路に生じる起電力がその回路を横切る磁気力線の本数に比例する」・・・※と考えたとき単極誘導はどのような現象になるかを考える。※の考え方は、磁気力戦線の実在性に関わらず、起電力は、回路内の自由電子が磁場に対して相対的に速度を持っているとき、その自由電子にローレンツ力がかかり生じるということと同じである。本実験の結果は磁石のみ回転した時は起電力が生じなかった。しかし、上のように考えると、磁石のみを回した時は磁気力線は銅円盤内の自由電子に対して相対速度を持っており、起電力が生じることになる。一方、磁石と銅円盤両方を回した時は磁気力線は自由電子に対して相対速度がゼロ、すなわち磁気力線は回路を横切らないので起電力は生じないことになる。これは実験結果に反する。ということは、磁気力線は実在の存在ではない。磁気力戦が本質ではなく、磁場（もしくはベクトルポテンシャル）が本質的だということになる。

続いて、本実験で単極誘導の回路で電圧計の代わりにコンデンサーを繋いだらどうなるか。この場合は、起電力は同じく銅円盤のみ回転と両方回転の時に生じる。この生じた起電力によって、コンデンサーが充電される。すなわち、実験者が生成した回転の運動エネルギーはコンデンサーの静電エネルギーに変換される。ちなみ

に、電圧計の時は、電圧計の内部抵抗によってジュール熱に変換されていた。最後に、コンデンサーや導線といった測定系を取り除いた場合はどうなるか。この場合も同様に起電力は生じる。しかし、ローレンツ力を受けた自由電子の行き場所がなく、銅円盤の動径方向で電荷の偏りが生じる（図6）。銅円盤を回転させているので、電荷の偏りによって、銅円盤には半径に対応したループ電流が生じているとみなせる。ループ電流は磁気双極子と等価であり、磁気双極子は磁場を生むが、負の電流と正の電流が発生させる磁場で相殺して結局ループ電流が生む磁場はゼロになると考える。電荷の偏りで電場は発生する。

## 7 結論

理論が確立していない状況で、実験データから物理学を発展させることはとても難しいことが明らかになった。特に実験精度が悪いのか、解析過程で間違えているのか、判断がつかないことが多々あった。理論という拠り所が無いとき、いかにして解析していくのか。特に、ガウスメータから磁気双極子モーメントを求めるときの最も確からしい値を導出する方法は結論付けられなかった。

単極誘導の実験で、磁気力線は実在の存在ではないことが明らかになった。また、磁場は磁石から生えているのではなく、空間の各点に固定されている物理量だということもわかった。さらに、単極誘導はレンツ・ノイマンの法則では説明できないが、ローレンツ力で説明できることが分かった。

## 8 参考文献

- ・ 2021 年度 物理学実験 1 基礎物理学実験 東北大学理学部物理学教室