

物理学実験 I
課題 5
RLC 回路とオペアンプ
回路ボックス No.4

実験者番号 72
学籍番号 B9SB2032 木村佑斗

2022 年 1 月 28 日

目次

1	目的	3
2	原理	3
2.1	RLC 回路	3
2.2	オペアンプと積分回路	4
3	実験 1-1 オシロスコープ	4
3.1	方法	4
3.2	結果	4
3.3	考察	5
4	実験 1-2 過渡現象の観測	6
4.1	方法	6
4.2	結果	6
4.3	考察	7
5	実験 1-3 直列 RLC 回路	8
5.1	方法	8
5.2	結果	8
5.3	考察	9
6	実験 1-4 並列 RLC 回路	11
6.1	方法	11
6.2	結果	11
6.3	考察	12
7	実験 2 積分増幅回路	13
7.1	方法	13
7.2	結果	14
7.3	考察	15
8	論理回路	17
9	結論	20

1 目的

実験全体を通して、物理学の研究に必要な電子回路の特性をオシロスコープで測定する。実験 1 では RLC 回路で時間的に変動する電気信号を測定し、過渡現象と共振現象について時定数や Q 値などを求めて分析する。実験 2 ではアナログ IC の代表的存在のオペアンプを用いた積分増幅回路をハンダ付けをして作成し、正常に動作をしているかを確認することが目的である。そのためには交流回路の理論も必要になる。

2 原理

2.1 RLC 回路

2.1.1 過渡現象

過渡現象は、ある状態に変動があった時から次の安定状態に至る間におこる現象である。電気回路においては、スイッチを入れてから、電圧や電流が定常値に達するまでの時間変化のことである [1]。これはエネルギー状態を維持しようとする性質によって生じる。本実験では RC 直列回路とオシロスコープで過渡現象を視覚的に明らかにする。初期状態のコンデンサに溜まっている電気量 $q(t=0)$ を 0 とすると、回路方程式は図 1*1 より、

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E \quad (1)$$

となる。

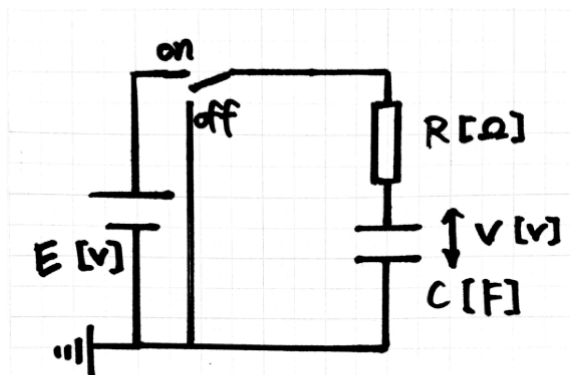


図 1 RC 直列回路

初期条件

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad q(0) = 0 \quad (2)$$

のもとで微分方程式を解くと

$$q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad Q_0 \equiv EC, \quad \tau \equiv RC \quad (3)$$

τ を時定数と呼ぶ。コンデンサの電圧は q に比例する。すなわち、過渡現象は、時定数が小さいほど早く状態が変化して定常状態にたどり着く。

2.1.2 RLC 共振回路

共振現象を見るには入力交流でなければならない。本実験では信号発生器で交流（正弦波・矩形波）を発生させて RLC 回路に入力してその出力電圧をオシロスコープで見る。

共振現象は

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (L: \text{コイルのインダクタンス}, C: \text{コンデンサの静電容量}) \quad (4)$$

*1 初期状態、すなわちスイッチを入れた直後に $q = 0$ にしたいので off 時にはグラウンドにつないである。

としたときに起きる現象である。この時、回路のインピーダンスは最小となりコンデンサにかかる電圧 V_C が最大となる。共振の鋭さを示すものとして Q 値がある。 Q 値は振動数 f と V_C のグラフの幅 Δf で次のように定義する。

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \Delta f = |f_2 - f_1|, \quad V_C(f_0) = \sqrt{2}V_C(f_{1,2}) \quad (5)$$

Q 値が大きいと共振は鋭い。並列共振回路で共振現象を見るときは回路の全インピーダンス $Z(f)$ を見る。並列共振回路の全インピーダンスは次式の通り。

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R+i\omega L}} \quad (6)$$

$\omega L \gg R$ の時は共振周波数と Q 値は直列共振回路の式でよい近似となる。実際、後の実験の解析で得られるように R は ωL の 1/100 程度のオーダーであるから、直列共振回路の式を使っても本実験の有効桁の範囲内では問題ない。

2.2 オペアンプと積分回路

実験 2 の考察部分に記述した。

3 実験 1-1 オシロスコープ

3.1 方法

信号発生器を変換コネクタと同軸ケーブルを用いてオシロスコープに接続した。信号発生器のグランド側と変換コネクタのグランド側がつながるように注意した。同軸ケーブルの特性インピーダンスは 50Ω を用いた。信号発生器は 0dB、正弦波に設定してオシロスコープで波形を観察した。オシロスコープの使い方はテキストに書いてある通りで、テキストに従ってオシロスコープの操作を確認していった。

3.2 結果

周波数 f は実験 1-1 を通して 500.6Hz だった。オシロスコープでは基準電圧 0V と基準時刻 0s を任意の位置に設定できる。ここではどちらも中央に設定し、固定した。これらの位置はそれぞれ画面左と上の矢印が示している。

まずはトリガーの操作によって、オシロスコープの画面にどのように正弦波が現れたかを説明する。トリガーの位置は画面右の矢印が示している。トリガーの設定を立ち上がりを設定すると、トリガーの位置に依存して波形は図 1・2 のように移動した。すなわち、トリガーの位置と時刻の基準時刻 0s の位置の交点に波形の傾きが正となる点が重なるように表示されていた。

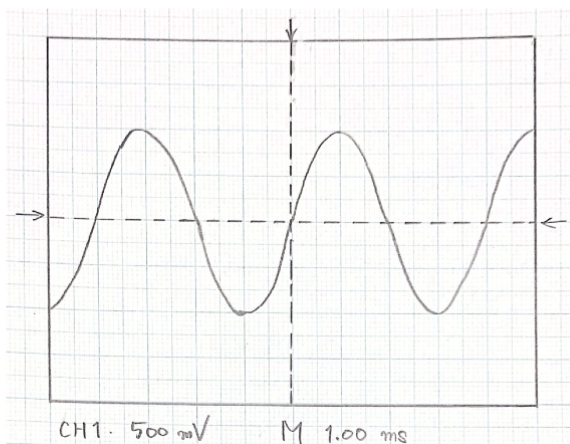


図 2 トリガー 立ち上がり 1

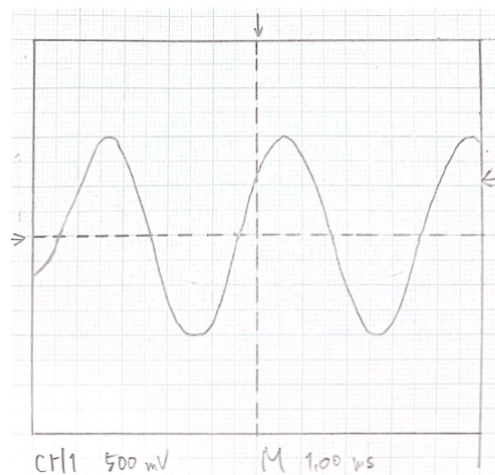


図 3 トリガー 立ち上がり 2

立ち下がりの設定にすると、傾きが負の点が基準時刻とトリガーの位置の交点に重なるように表示された。

また、トリガーを波形の最大値（または最小値）より高い（低い）位置に設定すると、波形は表示されなかった。最大値（または最小値）よりぎりぎり低い（高い）位置に設定したときは波形は表示されるがゆらいでいて不安定だった。

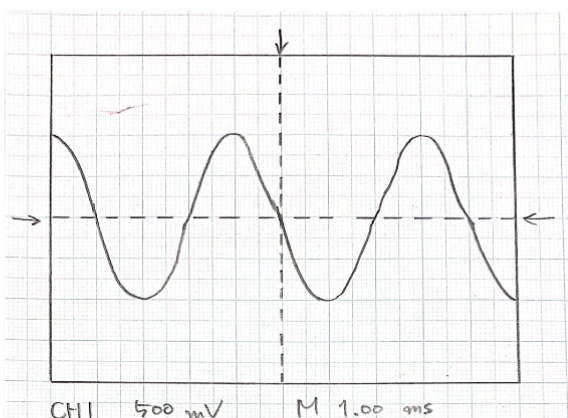


図4 トリガー 立ち下がり1

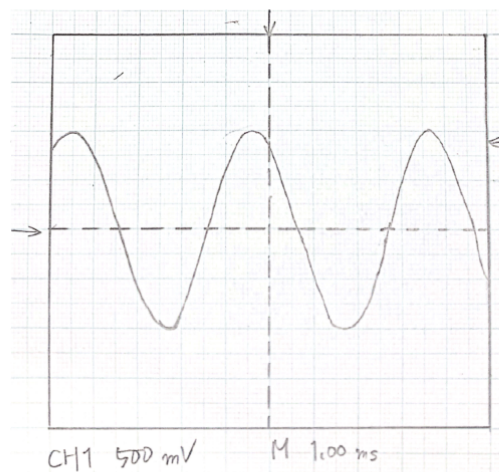


図5 トリガー 立ち下がり2

次に、カーソル測定機能を使って電圧振幅と周期を測定した。振幅は図5のように測りたい幅をカーソルで合わせて、右横の表示を見ればよい。周期も同様に測りたい幅をカーソルで合わせて表示を確認する。結果は電圧振幅 $\Delta V = 1.96\text{V}$ 、周期 $\Delta t = 2.00\text{ms}$ だった。

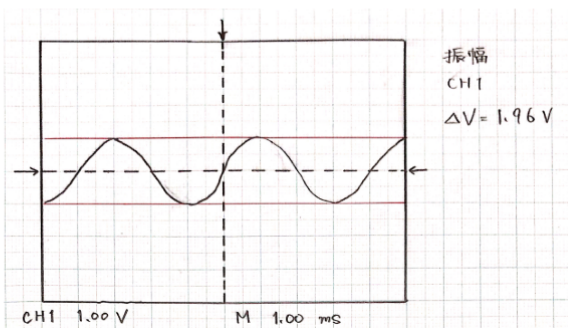


図6 カーソル 振幅測定

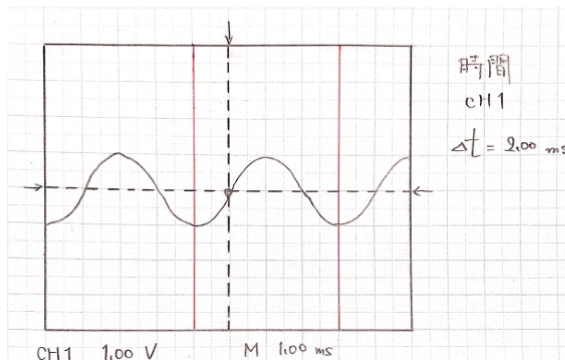


図7 カーソル 時間（周期）測定

3.3 考察

ここから振動数 f を計算すると、 $f = 1/\Delta t = 5.00 \times 10^2 \text{Hz}$ となった。以降の実験で振動数を画面表示から読み取る際に、有効数字をどこまでにするかが問題になるのでここで考察しておく。画面表示の周波数は5桁目から揺らいでいた。したがって4桁目までを有効数字にするのが妥当である。有効数字の最小桁は常に1/10の誤差を含む。したがって、カーソル測定機能から求めた振動数 $f_{\text{cursor}} = (5.00 \pm 0.005) \times 10^2 \text{Hz}$ となる。実際、有効数字を4桁としたときの画面表示の振動数は500.6Hzであり、ぎりぎり誤差範囲から外れる。しかし、カーソル測定機能はあくまでも手動なので、実際は誤差はより大きいと考えられる。したがって、画面表示の周波数は有効数字4桁とすると、必ずカーソル測定機能で求める周波数の誤差内に収まる。以上の議論によって、“画面表示の周波数は”有効数字4桁として以降の実験の解析を行う。

4 実験 1-2 過渡現象の観測

4.1 方法

回路ボックス No.4 の RC 回路のインプットに T 字コネクタをつなぎ、オシロスコープの CH1 と信号発生器を変換コネクタと同軸ケーブル (50Ω) でつないだ。回路のアウトプット側はオシロスコープの CH2 と同軸ケーブルでつないで、矩形波を発生させた。オシロスコープに表示された波形は下図の通り。

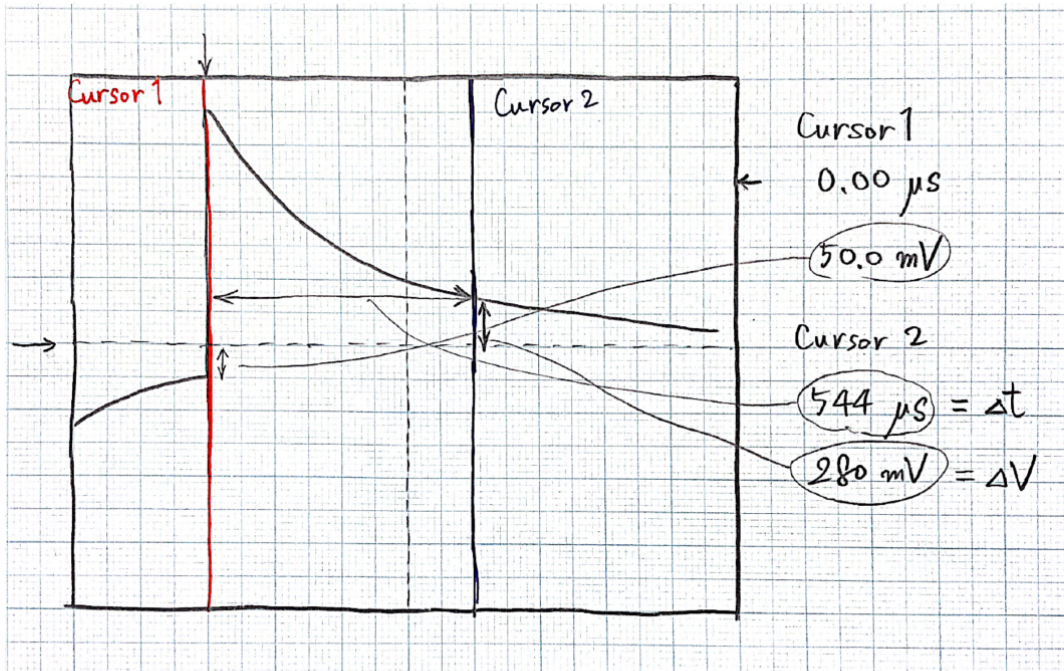


図 8 過渡現象測定時のオシロスコープのディスプレイ

この図のように、トリガーは立ち上がりに設定し、カーソル 1 は立ち上がりの位置に合わせた。時間に関するカーソル測定機能を使った。カーソル 1 の時間は常にゼロを示し、電圧は注目していない負の方向の収束値を示している。本実験で大事な値はカーソル 2 に表示されるものである。カーソル 2 で示される時間と電圧はそれぞれ図の通り。カーソル 2 を動かして立下り時間 t と抵抗電圧 V_r を 10 点測定した。

4.2 結果

測定結果は表 1 の通り。ただし、表中の () は有効桁以外の桁を示している。

表 1 過渡現象の測定結果 (有効数字は誤差以外全て 3 桁)

Deta No.	立下り時間 $t[\mu\text{s}]$	抵抗電圧 $V_R[\text{V}]$	誤差 ΔV_R	$\ln V_R$	$t \ln V_R$	t^2
1	8.00	1.72	0.02	0.542(324291)	4.33(8594327)	64
2	100	1.24	0.02	0.215(11138)	21.5(1113796)	100(00)
3	200	0.900	0.02	-0.105(360516)	-21.0(7210313)	400(00)
4	300	0.620	0.02	-0.478(035801)	-143.(4107403)	900(00)
5	400	0.440	0.02	-0.820(980552)	-328.(3922208)	160(000)
6	500	0.320	0.02	-1.139(434283)	-569.(7171416)	250(000)
7	600	0.240	0.02	-1.42(7116356)	-856.(2698134)	360(000)
8	700	0.170	0.02	-1.77(1956842)	-124(0.369789)	490(000)
9	800	0.120	0.02	-2.12(0263536)	-169(6.210829)	640(000)
10	900	0.0800	0.02	-2.52(5728644)	-227(3.15578)	810(000)
Σ	4508	5.85	0.2	-9.63(1440859)	-710(2.748685)	285(0064)

この表をもとに最小二乗法で方対数用紙上の $V_R - t$ のフィッティング直線の式を求めた。定数 E 、時定数を τ とすれば、 V_R の時間変化は、

$$\ln V_R = \ln E - \frac{t}{\tau} \quad (7)$$

と表せる。ここで、 C, A と置くと、この式は

$$C = A + Bt \quad (8)$$

と書ける。最小二乗法で A, B を求めると、 $A \simeq 0.559, B \simeq -0.00338$ となる。すなわち、 $E \simeq 1.75$ となり、 $t = 1000$ の時、 $V_R \simeq 0.0598$ となる。この近似直線を方対数用紙上の (t, V_R) プロットに重ねて書いたのが図 1' である。方対数用紙上で右肩下がりの直線になった。時定数 τ は

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{1}{B} \\ &= 295.8\dots \\ &= 296\mu\text{s} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

4.3 考察

$\tau = CR$ であり、 $R = 51\text{k}\Omega$ が既知なのでコンデンサの静電容量が求まる。

$$\begin{aligned} C &= \frac{296\mu\text{s}}{51\text{k}\Omega} \\ &= \frac{296 \times 10^{-6}\text{s}}{51 \times 10^3\Omega} \\ &= 5.803\dots \times 10^{-9}\text{F} \\ &\simeq 5800\text{pF} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。(有効数字 2 桁)

ここから、誤差を求める。誤差伝搬の式を利用しようと試みたが、誤差があまりにも小さな値となった。具体的には、立下り時間の誤差は無視して、最小 2 乗法の式から、 τ は V_{Ri} の 20 変数関数とみなして計算した。結果は $\Delta t = 9.26 \times 10^{-14}$ となった。最小二乗法の式はそれ自体が無理やり誤差 (2 乗残差) が最小となるようにする式なので、それに誤差伝播の式をさらに用いるのは適切ではないと考えた。したがって、別のもっと単純な考え方で誤差を評価してみる。時定数 τ の誤差を求めたいのでまずは B の誤差を求める。 B は傾きなので、近似曲線が誤差棒の範囲内に収まるという条件での最大の傾きと最小の傾きを求める。

$$-B_{max} = \frac{\ln 0.06 - \ln 1.74}{900 - 8.00} \simeq -0.00377 \quad (11)$$

$$-B_{min} = \frac{\ln 0.10 - \ln 1.70}{900 - 8.00} \simeq -0.00318 \quad (12)$$

したがって、それぞれ対応する時定数は

$$\tau_{min} = -\frac{1}{B_{max}} \simeq 265\mu\text{s} \quad (13)$$

$$\tau_{max} = -\frac{1}{B_{min}} \simeq 315\mu\text{s} \quad (14)$$

大きな方を誤差に採用すると、結局時定数 τ は $\tau = 296 \pm 31\mu\text{s}$ となる。

最後に静電容量の誤差を計算する。こちらは誤差伝播の式を用いる。抵抗 R は $51\text{k}\Omega$ で有効数字 2 桁である。有効数字の最小桁は常に $1/10$ の誤差を含んでいるので $R = 51 \pm 0.5\text{k}\Omega$ とすべきである。 $C = \tau/R$ より、

$$\begin{aligned} \Delta C &= \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial \tau} \Delta \tau\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial R} \Delta R\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{R^2} \Delta \tau^2 + \frac{\tau^2}{R^4} \Delta R^2} \\ &= \sqrt{\frac{31^2 \times 10^{-12}}{51^2 \times 10^6} + \frac{296^2 \times 0.5^2 \times 10^{-12}}{51^4 \times 10^{12}}} \\ &\simeq 61\text{pF} \end{aligned} \quad (15)$$

となるので、静電容量 C は有効数字に注意して、 $C = 5800 \pm 100\text{pF}$ となる。

5 実験 1-3 直列 RLC 回路

5.1 方法

上の過渡現象の実験から、インプットとアウトプットを直列 RLC 回路につなぎ変えて、信号発生器を正弦波に設定した。あらかじめ、回路ボックスに書いてあるインダクタンスと静電容量から、共振周波数を見積もっておく。その周波数周辺に振動数を合わせ、信号発生器の振動数のつまみを回しながら CH2 の電圧振幅が極大になる振動数（共振周波数） f_0 を得た。その時の電圧を V_0 と置いたとき、 $V_0/\sqrt{2}$ となる周波数までのデータを中心に線形グラフ用紙に (f, V) をプロットしながらオシロスコープの MEASURE 機能を使用して測定した。

5.2 結果

理論的には共振周波数は、 $L = 22\text{mm}$, $C = 22\text{mH}$ から、

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \simeq 59\text{kHz} \quad (16)$$

となる。以下、測定結果。周波数とその時の電圧と誤差電圧の結果は表 2 の通り。また、誤差を含んだプロット図は図 2' の通り。共振周波数 $f_0 = 52.00\text{kHz}$ に極大点を持つガウシアンのような形となった。

表 2 直列共振回路の測定結果

周波数 [kHz]	電圧 [V]	誤差電圧 [V]
47.93	13.6	0.4
45.62	10.8	0.4
46.37	11.6	0.4
47.08	12.6	0.4
48.34	14.6	0.4
48.76	15.6	0.4
49.21	16.4	0.4
49.63	17.4	0.4
50.00	18.4	0.4
50.21	18.6	0.4
50.68	19.6	0.4
51.51	20.6	0.4
51.10	19.8	0.4
51.97	21.0	0.4
53.11	20.0	0.4
54.01	18.8	0.4
55.03	16.4	0.4
55.86	14.8	0.4
57.12	12.4	0.4
58.01	11.2	0.4
52.29	20.8	0.4
53.54	19.6	0.4
54.48	17.6	0.4
55.43	15.6	0.4

5.3 考察

ここではプロット図を手動で連続的な曲線にして、それをもとに Q 値と抵抗値 R を求める。まず、Q 値から求めていく。電圧の有効数字は 3 桁である。周波数 f の有効数字は 4 桁である。測定誤差があるので目盛の読み取りの誤差は考えないことにする。したがって、共振周波数 f_0 は $f_0 = 52.00\text{kHz}$ と読み取れる。その時の電圧は $V_c = 21.5 \pm 0.4\text{V}$ である。よって $V_c/\sqrt{2} = 15.2 \pm 0.3\text{V}$ となる。この時の周波数 $f_1 < f_2$ の値を誤差と有効数字の最小桁の誤差に注意して読み取ると (図 2')、

$$f_1 = 48.70 \pm 0.17 \quad (17)$$

$$f_2 = 55.64 \pm 0.15 \quad (18)$$

したがって、 $\Delta f = f_2 - f_1 = 6.94\text{kHz}$ 。その誤差 $\Delta\Delta f$ は

$$\begin{aligned} \Delta\Delta f &= \sqrt{\Delta f_1^2 + \Delta f_2^2} \\ &= \sqrt{0.17^2 + 0.15^2} \\ &\simeq 0.23 \end{aligned} \quad (19)$$

となる。Q 値は $Q = f_0/\Delta f = 52.00/6.94 \simeq 7.49$ となる。その誤差は

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \frac{f_0}{\Delta f^2} \Delta \Delta f \\ &= \frac{52.00 \times 0.23}{7.49^2} \\ &\simeq 0.21\end{aligned}\quad (20)$$

となる。以上より、Q 値は $Q = 7.49 \pm 0.21$ となる。Q 値が求まったので、回路中の抵抗の値 R を計算で求めることができる。 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ より、

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= \frac{1}{7.94} \sqrt{\frac{22 \times 10^{-3}}{330 \times 10^{-12}}} \Omega \\ &\simeq 1.1 \text{k}\Omega\end{aligned}\quad (21)$$

誤差は、

$$\begin{aligned}\Delta R &= \frac{dR}{dQ} \Delta Q \\ &= -\frac{1}{Q^2} \sqrt{\frac{L}{C}} \Delta Q \\ &= -\frac{1}{7.94^2} \sqrt{\frac{22}{0.33}} \times 10^3 \times 0.21 \Omega \\ &\simeq 27 \Omega\end{aligned}\quad (22)$$

L, C が有効数字 2 桁なので、 R も有効数字 2 桁が適切。したがって $1.1 \text{k}\Omega$ に対して、誤差 27Ω は十分無視できる。以上より、抵抗値は $R = 1.1 \text{k}\Omega$ と書ける。

次に Q 値が共振回路に蓄えられるエネルギーと 1 サイクルに発生するジュール熱損失の比の定数倍になっていることを示す。前者を E 、後者を E_{loss} と置く。エネルギーはインダクタとコンデンサに蓄えられる。直列共振回路の電流 j の一般解は

$$j(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \phi)\quad (23)$$

より、

$$\begin{aligned}E &= \frac{q^2}{2C} + \frac{Lj^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int j dt \right)^2 + \frac{1}{2} Lj^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{LV_0^2}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}^2}\end{aligned}\quad (24)$$

となる。一方ジュール熱損失は抵抗のみで発生するとみなせる。なぜならインダクタとコンデンサは 1 サイクルのうちでエネルギー損失は 0 となるからである。よって、

$$\begin{aligned}E_{loss} &= \int_{1 \text{ cycle}} Rj^2 dt \\ &= \frac{\pi R V_0^2}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}^2} \\ &= \frac{\pi R V_0^2 \sqrt{LC}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}^2}\end{aligned}\quad (25)$$

したがって、

$$\frac{E}{E_{loss}} = 2\pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{2\pi}{Q} \quad (\text{証明終})\quad (26)$$

6 実験 1-4 並列 RLC 回路

6.1 方法

配線を並列 RLC 回路につないだ。信号発生器は正弦波にした。まず $\omega L \gg R$ という仮定の下で、直列回路の時と同様の式で共振周波数を見積もった。MEASURE 機能で MATH MENU から演算:-、ソース CH1-CH2 を選択して得られる電圧 V_{ab} と CH2 の電圧 V_r と $r = 1\text{k}\Omega$ からインピーダンスの絶対値 $|Z|$ を求めて、それと周波数をプロットしながら測定した。インピーダンスの絶対値は

$$|Z| = \frac{V_{ab}}{\frac{V_r}{r}} = \frac{V_{ab}}{V_r} \text{k}\Omega \quad (27)$$

で求められる。

6.2 結果

共振周波数 f_0 の理論値は $L = 22\text{mH}$, $C = 3300\text{pF}$ なので、

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \simeq 18\text{kHz} \quad (28)$$

となった。測定結果は表 3 の通り。 V_{ab} の誤差は $0.02\sim 0.08\text{V}$ 、 V_r の誤差は $0\sim 8\text{mV}$ だった。表には載せていないが、グラフには反映させてある (図 3'~5')。インピーダンスの誤差は誤差伝播の式から求めた。グラフについて、 V_{ab} は変化が少なく、その割に誤差が大きかった。 V_r は共振周波数を極小値とした放物線のような形で、 $|Z|$ は共振周波数を極大としたガウシアンのような形をしていた。

表3 並列共振回路の測定結果

振動数	$V_{ab}[\text{V}]$	$V_r[\text{mV}]$	$ Z [\text{k}\Omega]$
19.40	3.00	80	37.5
19.63	3.00	88	34.1
19.79	2.96	96	30.8
19.86	2.96	100	29.6
20.02	2.96	116	25.5
20.11	2.96	120	24.7
20.30	3.00	140	21.4
20.98	2.96	196	15.1
21.38	2.96	228	13.0
21.60	2.94	248	11.9
21.95	2.96	276	10.7
22.29	2.94	304	9.67
23.22	2.94	384	7.66
24.08	2.90	452	6.42
24.67	2.86	500	5.72
25.92	2.84	580	4.90
26.77	2.80	640	4.38
33.55	2.52	972	2.59
19.31	3.00	80	37.5
19.11	3.00	84	35.7
18.95	2.96	96	30.8
18.68	3.00	112	26.8
18.53	2.98	128	23.3
18.37	2.96	144	20.6
18.22	2.98	160	18.6
18.03	2.94	180	16.3
17.55	2.96	228	13.0
16.99	2.92	292	10.0
16.15	2.92	384	7.60
15.37	2.84	472	6.02
20.58	2.96	152	19.5
19.94	2.96	100	29.6
19.90	2.96	96	30.8

6.3 考察

直列共振回路と同様に Q 値と抵抗 R の値を求める。共振周波数 f_0 は $f_0 = 19.35\text{kHz}$ と読み取れる。その時のインピーダンスは $|Z|_c = 37.5 \pm 0.5\text{k}\Omega$ である。よって $|Z|_c/\sqrt{2} = 26.5 \pm 0.4\text{V}$ となる。この時の周波数 $f_1 < f_2$ の値を誤差と有効数字の最小桁の誤差に注意して読み取ると (図 2'),

$$f_1 = 18.73 \pm 0.15\text{kHz} \quad (29)$$

$$f_2 = 20.07 \pm 0.11\text{kHz} \quad (30)$$

したがって、 $\Delta f = f_2 - f_1 = 1.34\text{kHz}$ 。その誤差 $\Delta\Delta f$ は

$$\begin{aligned}\Delta\Delta f &= \sqrt{\Delta f_1^2 + \Delta f_2^2} \\ &= \sqrt{0.15^2 + 0.11^2} \\ &\simeq 0.19\end{aligned}\tag{31}$$

となる。Q 値は $Q = f_0/\Delta f = 19.35/1.34 \simeq 14.4$ となる。その誤差は

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \frac{f_0}{\Delta f^2} \Delta\Delta f \\ &= \frac{19.35 \times 0.19}{1.34^2} \\ &\simeq 2.0\end{aligned}\tag{32}$$

となる。以上より、Q 値は $Q = 14.4 \pm 2.0$ となる。Q 値が求まったので、回路中の抵抗の値 R を計算で求めることができる。 $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ より、

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= \frac{1}{14.4} \sqrt{\frac{22 \times 10^{-3}}{3300 \times 10^{-12}}} \Omega \\ &\simeq 180 \Omega \quad (\text{有効数字 2 桁})\end{aligned}\tag{33}$$

誤差は、

$$\begin{aligned}\Delta R &= \frac{dR}{dQ} \Delta Q \\ &= -\frac{1}{Q^2} \sqrt{\frac{L}{C}} \Delta Q \\ &= -\frac{1}{14.4^2} \sqrt{\frac{22}{3.3}} \times 10^3 \times 2.0 \Omega \\ &\simeq 25 \Omega\end{aligned}\tag{34}$$

L, C が有効数字 2 桁なので、 R も有効数字 2 桁が適切。したがって抵抗値は $R = 180 \pm 25 \simeq 180 \pm 30 \Omega$ と書ける。また、本実験中の各振動数 ω は $\omega \sim 60\text{kHz}$ より、 $\omega L \sim 1300 \Omega$ 。したがって仮定 $\omega L \gg R$ と結果はおおよそ矛盾していない。

次に直列共振回路と並列共振回路のインピーダンスの振る舞いの違いについて考察する。並列共振回路の場合は、共振周波数が極大点で、共振周波数からずれると低インピーダンスになった。直列共振回路の場合はその逆である。なぜなら、直列共振回路の電流の一般解は

$$j(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \phi)\tag{35}$$

なので、インピーダンスの絶対値は

$$|Z|(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\tag{36}$$

となる。この関数は共振周波数で極小値を取り、共振周波数から離れれば離れるほど増大する。すなわち並列共振回路と直列共振回路のインピーダンスは逆の振る舞いをする。

7 実験 2 積分増幅回路

7.1 方法

オペアンプと電子部品を図の実態配線図通りにはんだ付けした。その後、テスターで導通チェックを行い、ワニ口バナナクリップで電源の GND と製作回路の GND をつなぎ、+電源を V_{cc} に、-電源を V_{ee} に、そして信号発生器

はGNDとCH1につないだ。さらにプローブ(10MΩ)でオシロスコープのCH1と製作回路の V_{in} を、CH2と V_{out} をつないだ。オシロスコープの減衰をプローブのインピーダンスの合わせて×10にした。そして正弦波と矩形波を流し、製作回路が正常に動作しているかを調べた。

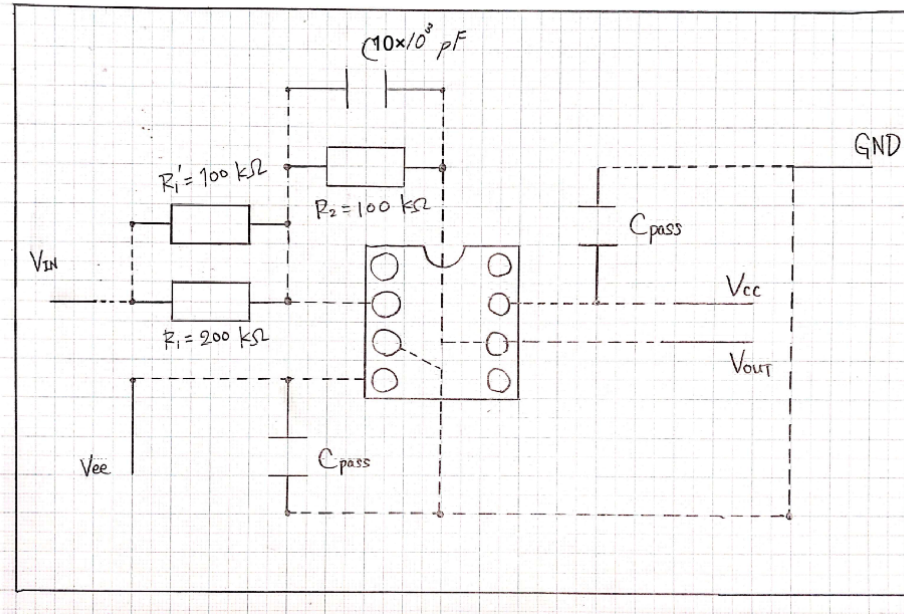


図9 積分増幅回路

7.2 結果

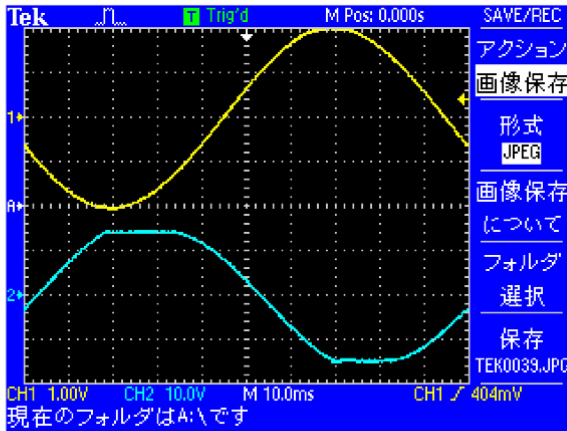


図10 発信機からの入力信号の電圧を大きくしたときの波形

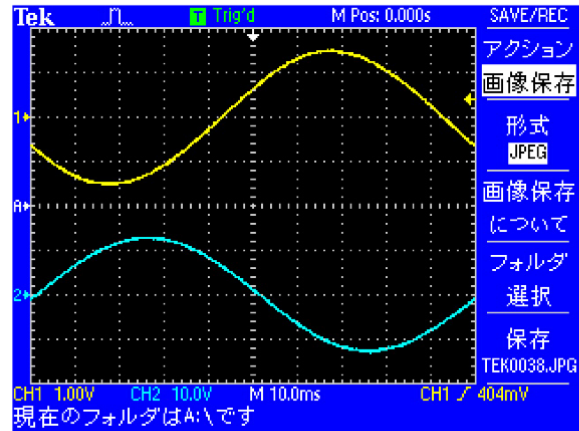


図11 10Hz

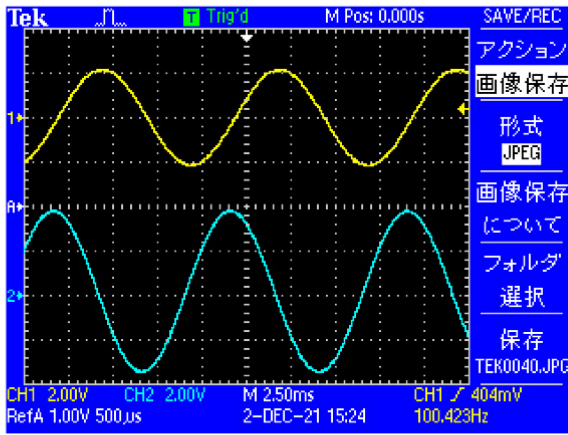


図 12 100.4Hz

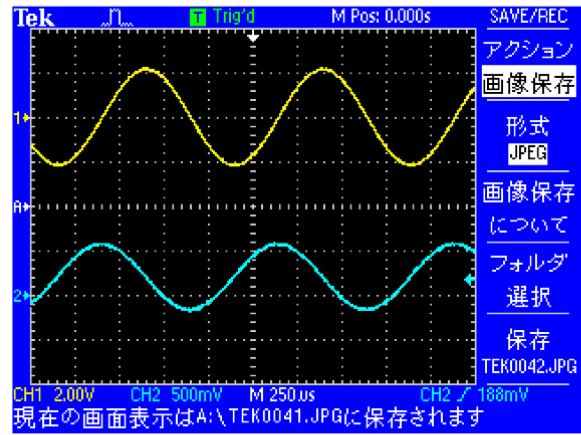


図 13 1.00kHz

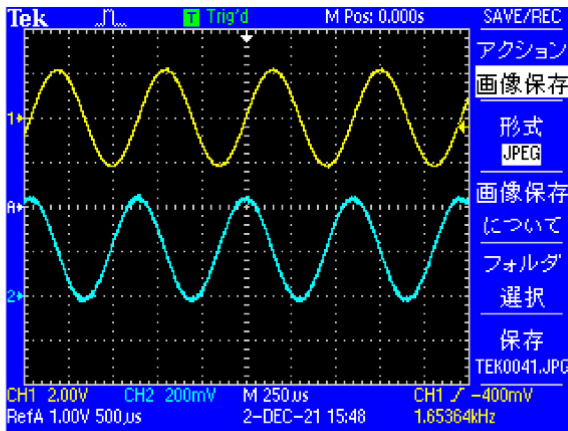


図 14 1.64kHz

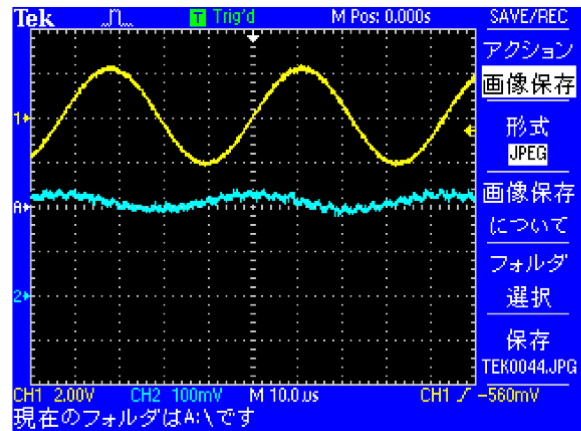


図 15 10kHz

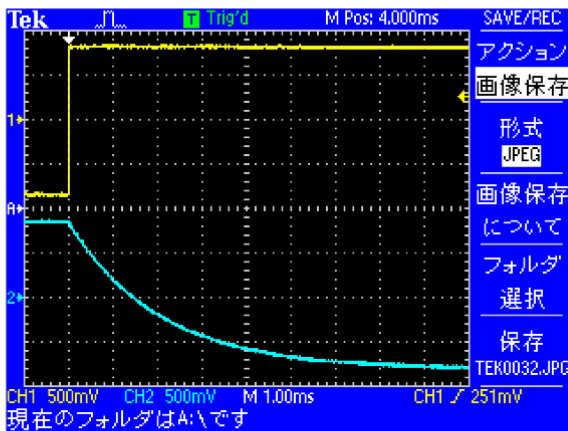


図 16 矩形波 1

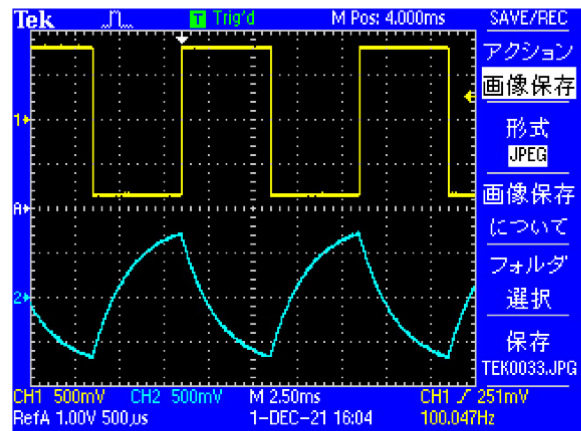


図 17 矩形波 2

7.3 考察

1. 積分増幅回路の動作原理を説明する。私が製作した回路とは抵抗器がの部分異なるが、それは単に抵抗を並列や直列に繋いでいるだけなので、本質的には同型であるから以下の図で説明する。

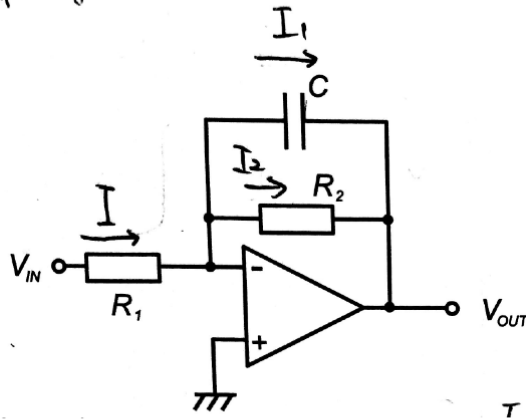


図 18 積分増幅回路

テキスト p.87 の図 3:理想オペアンプの図から、 V_{IN}, V_{OUT} は

$$V_{IN} = IR_1 \quad , \quad V_{OUT} = -IZ \quad (37)$$

と表される。ここで Z はコンデンサと抵抗の並列部の複素インピーダンスである。すなわち、

$$Z = \frac{1}{1/R_2 + i\omega C} \quad (38)$$

である。以上より、増幅率 V_{OUT}/V_{IN} は、

$$\begin{aligned} \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} &= -\frac{Z}{R_1} \\ &= \frac{R_2}{R_1[1 + (\omega CR_2)^2]}(-1 + i\omega CR_2) \end{aligned} \quad (39)$$

また、電圧 V も複素数と考えれば、増幅率は複素平面上での回転も含んでいるので、位相のずれもわかる。増幅率の絶対値を取れば電圧の振幅の増幅率がわかる。計算すると、

$$\left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (\omega CR_2)^2}} \quad (40)$$

となる。理想的なオペアンプの回路ならば、これはすなわち、各周波数 ω が大きければ増幅率は 0 に近づくということである。一方、絶対値を取る前の複素増幅率を見ると、各周波数 ω が大きいほど $-1 + i\omega CR_2 \equiv i\omega CR_2$ と精度良く近似ができるので位相は正確に $\pi/2$ 進むことになる。

また、最もシンプルな積分増幅回路は、以下の図に示すものである。この回路の場合、増幅率は

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{i}{\omega CR} \quad , \quad \left| \frac{V_{OUT}}{V_{IN}} \right| = \frac{1}{\omega CR} \quad (41)$$

である。このように、低周波数領域では増幅率が無限大まで大きくなってしまい、回路がうまく動作しなくなる [3]。その代わりに、位相は常に $\pi/2$ だけ進んでいる。このように、低周波数領域での増幅率の発散を防ぐためにコンデンサと並列に抵抗をつないでいるのである。

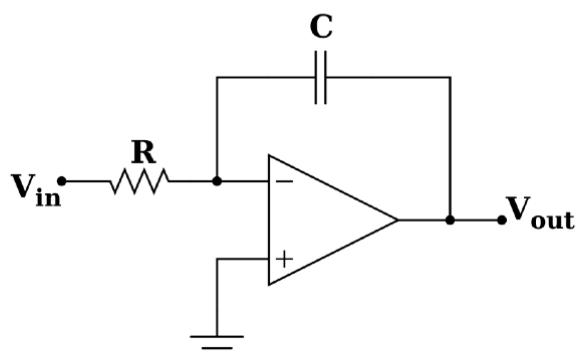


図 19 積分増幅回路

2. 図 10 から順に見ていく*2。まずは図 10 である。これは、増幅回路において出力電圧に上限があることから生じるものである。この上限というものは電源電圧 $\pm 15V$ と一致する。実際、CH2 の出力波形のゆがみは $\pm 15V$ のところで生じている。

次に図 11 から 14 まで見る。10Hz では位相のずれは $3\pi/4 \sim \pi$ であることが読み取れる。すなわち、式 (39) からわかる通り、低周波数では $\pi/2$ ずれてはいない。反転しているので $\pi/2$ よりさらに進んでいる。周波数を上げていけば位相のずれは $\pi/2$ に近づかずである。図 14 を見てみると、きれいに $\pi/2$ ずれていることがわかる。式 (40) に $R_1 = 200/3k\Omega$, $R_2 = 100k\Omega$, $C = 10 \times 10^3 pF$ と各周波数 $\omega = 2\pi f$, $f = 1.64kHz$ を代入すると、増幅率はおおよそ $1/15$ となる。これを図 14 から読み取れる入力電圧 $2V$ かけると、出力電圧はおおよそ $0.13V$ となる。測定結果は $0.24V$ ほどで正確に一致はしていないがオーダーはあっているので、動作は正常である。図 15 は周波数 $f = 10kHz$ であるが、この場合増幅率は図 14 の約 $1/6$ になる。すなわち出力電圧は $0.02V$ くらいになり、 $100mV = 0.1V$ レンジでもぎりぎり見える程度になってしまっている。考察 1 で述べた原理の通り動作している。

次に矩形波を入力したときの波形が図 16 と 17 である。このように不連続な信号を入力したときには、出力電圧はすぐにその電圧に追随するのではなく、必ず遅れて入力電圧に相当する電圧に到達する（スルーレート）。矩形波の周期がスルーレートに比べて短いときは図 17 のように目標の電圧に到達する前に入力電圧が再度ステップしてしまう。

8 論理回路

論理回路は NOT、AND、OR を使って XOR を作ることができる。XOR は日本語では排他的論理和と呼ばれ、入力 (1,1) と (0,0) を出力 0 に、入力 (1,0) と (0,1) を出力とする演算である。2 通りの合成の仕方が考えられた。各段の素子での値を表にした。

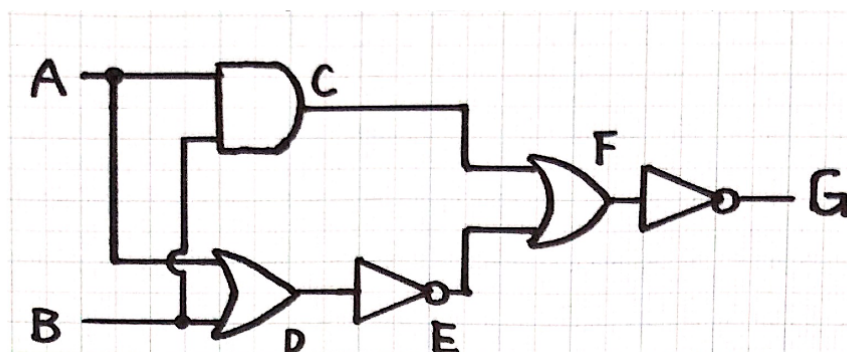


図 20 NOT,AND,OR のみで XOR その 1

*2 図 10,11,16,17 は積分回路の抵抗を組み替える前の波形なので、増幅率（絶対値）には触れないことにする。

表4 各段の素子での値

A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0

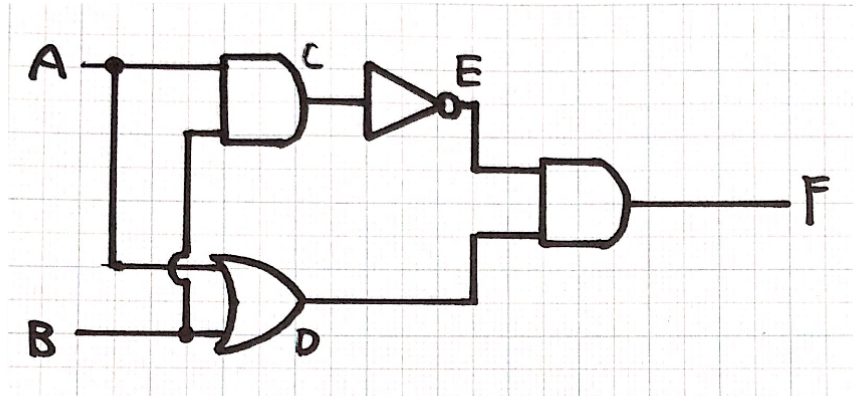


図21 NOT,AND,ORのみでXOR その2

表5 各段の素子での値

A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0

このように、実際、入力値と出力値がどちらも XOR と一致している。また、ド・モルガンの法則を利用して入力 A,B から出力までの演算を考えてみると、XOR その1の場合、

$$\begin{aligned} OUT &= \overline{(A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})} \\ &= (\overline{A \cap B}) \cap (A \cup B) \end{aligned} \tag{42}$$

となり、これはその2の演算と同値な式になっている。すなわち、この演算の同値な形であれば XOR は作れる。

次に NAND のみを使って、さらに NOR のみを使って NOT を作った。入出力は以下の表の通り。

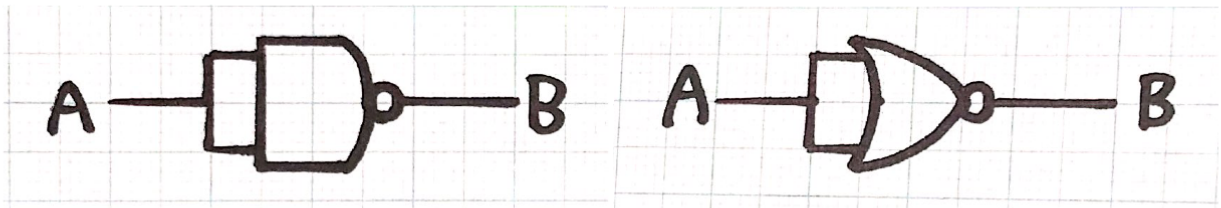


図22 NANDのみでNOT

図23 NORのみでNOT

表 6 各段の素子での値

A	B
1	0
0	1

NAND のみで作った NOT の演算は

$$\begin{aligned} OUT &= \overline{A \cap A} \\ &= \overline{A} \end{aligned} \tag{43}$$

となる。OR のみの NOT はこの式の \cap を \cup に変えればよい。次は NAND のみで AND を、NOR のみで AND を作った。

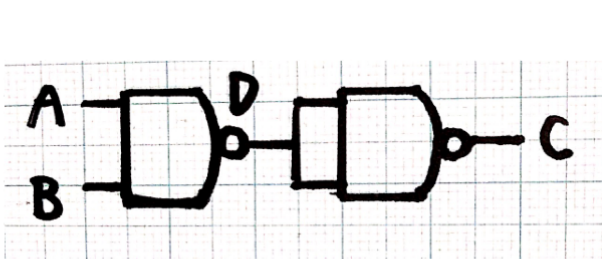


図 24 NAND のみで AND

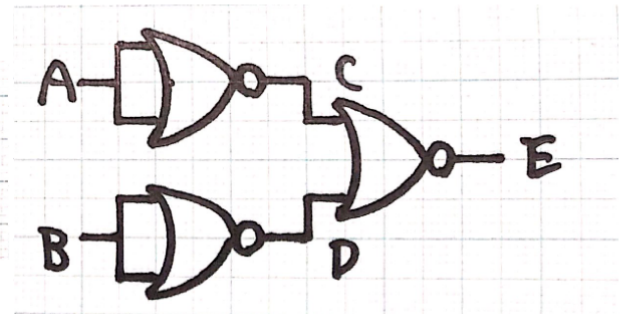


図 25 NOR のみで AND

表 7 各段の素子での値 (左)

A	B	D	C
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

表 8 各段の素子での値 (右)

A	B	C	D	E
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0

NAND のみで作ったの AND の演算は、

$$\begin{aligned} OUT &= \overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B})} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned} \tag{44}$$

NOR のみで作ったの AND の演算は、

$$\begin{aligned} OUT &= \overline{(\overline{A \cup A}) \cup (\overline{B \cup B})} \\ &= \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \\ &= A \cap B \end{aligned} \tag{45}$$

となり、AND になっていることが確認できた。最後に NAND のみで OR を、NOR のみで OR を作った。

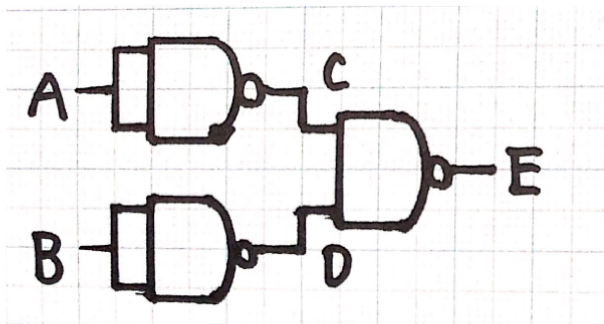


図 26 NAND のみで OR

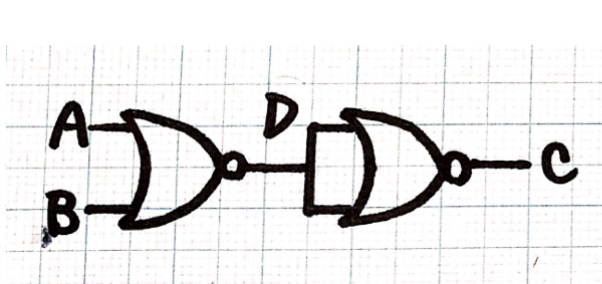


図 27 NOR のみで OR

表 9 各段の素子での値 (左)

A	B	C	D	E
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	0

表 10 各段の素子での値 (右)

A	B	C	D	E
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	0

NAND のみで作った OR の演算は

$$\begin{aligned}
 OUT &= \overline{(A \cap A) \cap (B \cap B)} \\
 &= \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \\
 &= A \cup B
 \end{aligned} \tag{46}$$

NOR のみで作った OR の演算は

$$\begin{aligned}
 OUT &= \overline{(A \cup B) \cup (A \cup B)} \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup B) \\
 &= A \cup B
 \end{aligned} \tag{47}$$

となり、どちらも OR になっていることが確かめられた。

9 結論

過渡現象で時定数を、共振回路で共振周波数や Q 値を測定することでその回路に組み込まれている素子の値を求めた。また、オペアンプとコンデンサを組み合わせることで積分増幅回路を制作し、その動作確認を理想的なオペアンプの場合と比較しながら行うことができた。

参考文献

- [1] デジタル大辞泉
- [2] 千葉工業大学 <https://www2.seki.cs.it-chiba.ac.jp/Elec/note3-4.pdf>
- [3] 実用電子回路ハンドブック 2 CQ 出版