加速器ゼミ第2回

2022/9/22

木村佑斗

1.　位相空間

新たな変数　$x' \equiv p$（注、運動量ではない。設計経路sに対するx
の変化量である。）

加速区間以外では

$$x'' = -K(s)\,x$$

つまり

$$x' = p \equiv f(x, p)$$
$$p' = -K\,x \equiv g(x, p)$$

この場合、

$$f = f(p)\,, g = g(x)$$

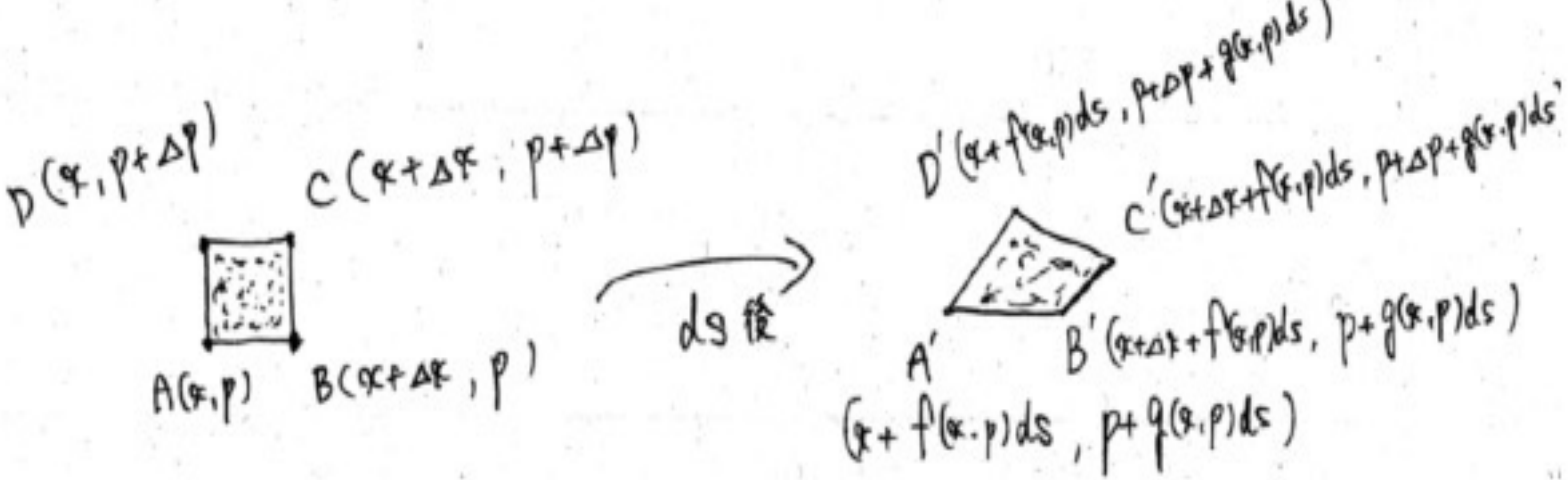
エミッタンス：全粒子の位相空間(x, p)の中に占める体積(面積)

加速区間以外では、エミッタンスは保存する。

(証明) 位相空間中の充分小さい正方形ABCDからdsだけ移動した後の微小領域A'B'C'D'の面積が等しくなることを示す。ただし以下に注意。

$$dx = \frac{dx}{ds}ds = x'ds = pds = f(x, s)ds$$

$$dp = \frac{dp}{ds}ds = p'ds = g(x, s)ds$$



D(q, p+Δp)
C(q+Δq, p+Δp)
A(q, p)
B(q+Δq, p)
ds 後
D′(q+f(q,p)ds, p+Δp+g(q,p)ds)
C′(q+Δq+f(q,p)ds, p+Δp+g(q,p)ds)
B′(q+Δq+f(q,p)ds, p+g(q,p)ds)
A′
(q+f(q,p)ds, p+g(q,p)ds)

A'B'C'D'の面積$= \left|\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}\right|$

$$= \left(\Delta x + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x ds\right)\left(\Delta p + \frac{\partial g}{\partial p}\Delta p ds\right) - \left(\frac{\partial g}{\partial x}\Delta x ds\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p}\Delta p ds\right)$$

$$= \Delta x \Delta p \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\right) ds\right)$$

$$= \Delta x \Delta p$$

=ABCDの面積

ただしdsの2次は無視した。

さらに、$f = f(p)$, $g = g(x)$を用いた。（証明終わり）

リウビルの定理：相互作用の無いN粒子の6N次元位相空間体積は不変（今回の場合は2N次元）

加速区間の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

変数変換βcdt → ds

$$x'' + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}x' = 0$$

加速区間では$\gamma' \neq 0$に注意

位相空間(x, p)で書くと

$$x' = p = f(x, p)$$

$$p' = -\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}p = g(x, p)$$

ゆえに、加速区間ではエミッタンスは保存しない。

2. Twissパラメータ（$x'' + K(s)x = 0$の下で）

解を仮定する。

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\psi(s) + \delta)$$

すると$\beta(s)$と$\psi(s)$に関して

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta^2 + K\beta^2 + (\beta\psi')^2 = 0$$

$$\beta\psi' = const = 1$$

つまり

$$\frac{\beta\beta''}{2} - \frac{\beta'^2}{4} + K\beta^2 + 1 = 0\,, \qquad \psi(s) = \int^s \frac{ds}{\beta(s)}$$

を満たすβ, ψを用いて

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\psi(s) + \delta)$$

←ベータトロン振動

となる。　$\beta(s)$はTwissパラメータ(α, β, γ)を決める関数で、ベータ関数という。

ベータ関数は個々の粒子の初期条件には依らないので、与えられた光学系を記述する関数と言える。

$x(s)$から$x'(s)$を求め、cosとsinを消去すると位相空間上の楕円の方程式が得られる。

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = 0$$

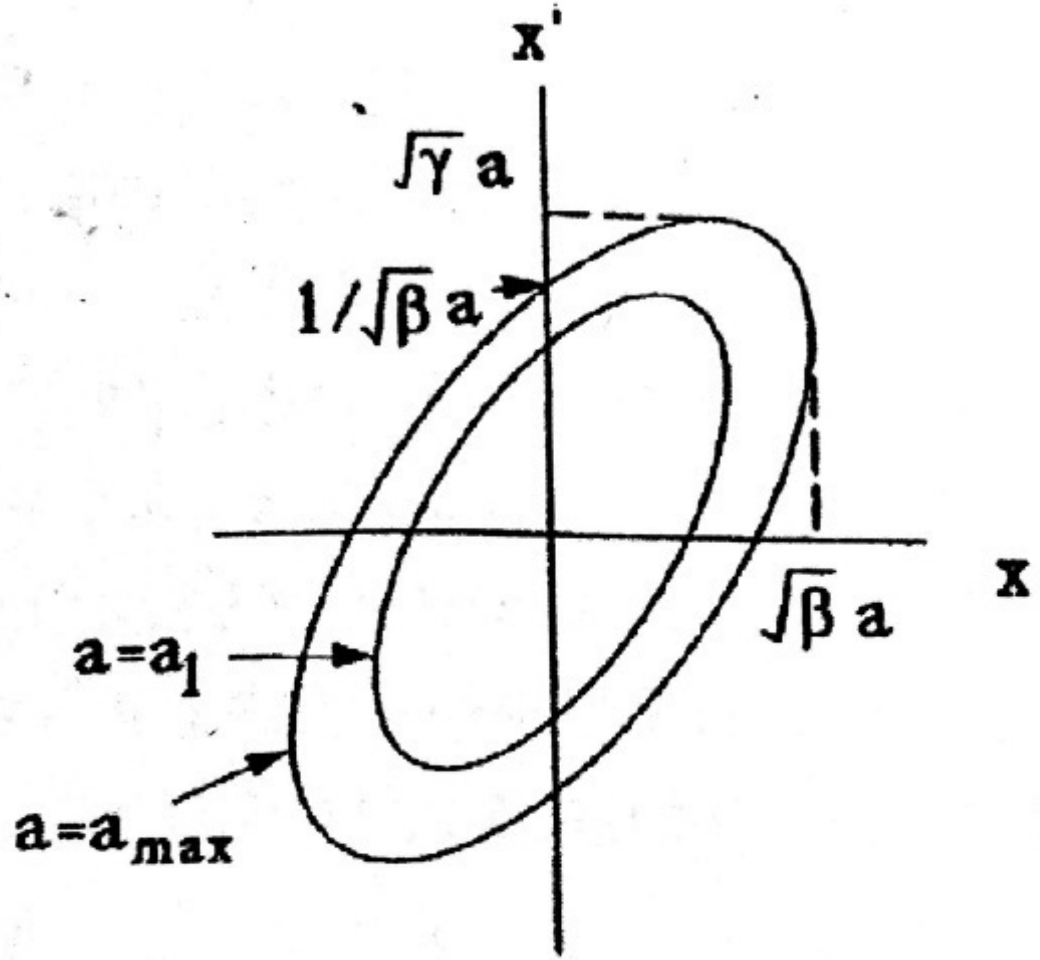
$$\alpha \equiv -\frac{\beta'}{2}$$

$$\gamma \equiv \frac{1+\alpha^2}{\beta}$$

楕円は次のページ

楕円の形状はtwissパラメータが決める。つまり、同じ光学系では位相空間上の楕円の形は同じ（相似）。

楕円の大きさはaが決める。aは個々の粒子の初期条件によって決まる値であり、実空間のx方向の値に対応する。従って必ず最大の$a = a_{max}$が存在する。つまり、最大の楕円が存在し、他の粒子はその楕円の内部の状態にある。



楕円の面積πa_{max}^2＝エミッタンス＝保存量。

a_{max}^2:クーラン・シュナイダー不変量

Twissパラメータがわかれば、その時点でのビームの状態がわかる。

転送行列でtwissパラメータを追えばいい。

S=0からSまでの転送行列Mはtwissパラメータと位相の変化

$$\Delta\psi \equiv \psi(s) - \psi(0)$$

を用いて書ける（導出は省く）。

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta/\beta_0}(\cos\Delta\psi + \alpha_0 \sin\Delta\psi) & \sqrt{\beta_0\beta}\sin\Delta\psi \\ -\{(1+\alpha_0\alpha)\sin\Delta\psi + (\alpha-\alpha_0)\cos\Delta\psi\}/\sqrt{\beta_0\beta} & \sqrt{\beta_0/\beta}(\cos\Delta\psi - \alpha\sin\Delta\psi) \end{pmatrix}$$

よって位相の変化をMの成分で書くと

$$\tan\Delta\psi = \frac{m_{12}}{\beta_0 m_{11} - \alpha_0 m_{12}}$$

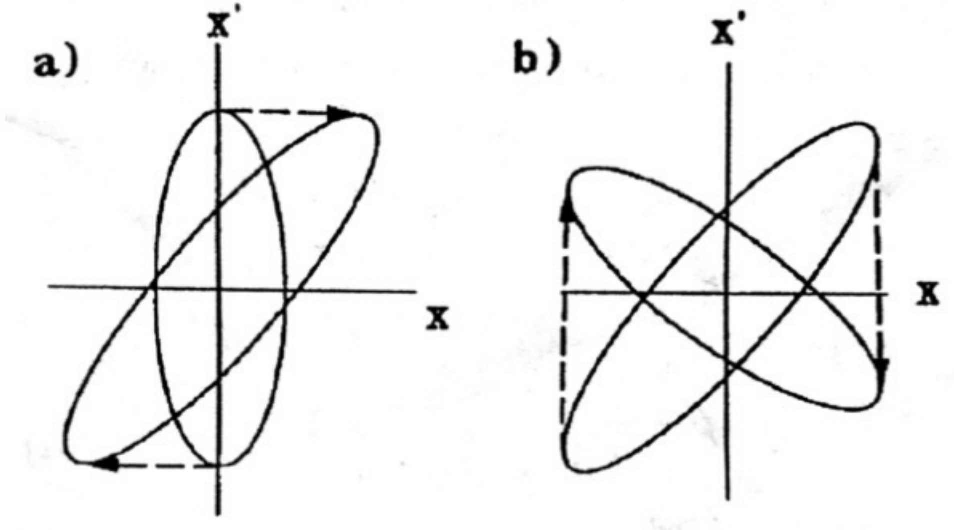
楕円の方程式を行列形式で書くと

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^T (M^{-1})^T \begin{pmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \beta_0 & \gamma_0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Mがわかっていればtwissパラメータを追える。

- まとめ

その光学系の転送行列と、入り口（s=0)でのベータ関数の値がわかれば、出口での楕円の形（すなわちビームの状態）とベータトロン振動の位相の変化がわかる。



自由空間　収束4極磁石(薄肉)

3. ビーム粒子のエネルギーが非一様の場合

中心粒子の運動量をpとすると、注目する粒子の運動量は$p + \Delta p$

偏向磁石

(先週やったセクター型をもとに考える)

設計軌道の半径ρ=$\frac{eB}{p} \rightarrow \frac{eB}{p+\Delta p} = \frac{\rho}{1+\frac{\Delta p}{p}}$

エネルギーの違いで磁石出口の曲げ角が異なる

つまり、$x'(\theta + \Delta\theta)$に$\Delta p/p$に比例した項が加わる。

したがって

$$x(\theta+\Delta\theta)=x(\theta)+\left(\frac{\rho}{1+\Delta p/p}+x\right)x'\Delta\theta$$

$$x'(\theta+\Delta\theta)=x'(\theta)-x\frac{1+\Delta p/p}{\rho}\Delta\theta+\frac{\Delta p}{p}\Delta\theta$$

1次まで残して整理すると

$$\frac{dx}{d\theta}=\rho x'$$

$$\frac{dx'}{d\theta}=-\frac{x}{\rho}+\frac{\Delta p}{p}$$

$$\rightarrow$$

$$x''+\frac{x}{\rho^2}=\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{p}$$

・・・(1)

(1)式の一般解はわかる。
特解がほしい。

<u>ディスパージョン</u>η　：　$\frac{\Delta p}{p}=1$に対する特解。このエネルギー遷移をもったビームの中心軌道からのずれ。

(1)式の解は

$$x = x_0 + \eta\frac{\Delta p}{p}$$

初期条件$x_0(0), x'_0(0)$
ディスパージョン$\eta = \rho(1-\cos\theta)$（実際この$\eta$は(1)式($\frac{\Delta p}{p}=1$)を満たす）
とすると、転送行列は、

$(x, x', \frac{\Delta p}{p})$に対して

$$M_H^{\text{セクター型}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta & \rho(1-\cos\theta) \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \cos\theta & \rho\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。（偏向磁石でエネルギーは変わらないので(3,1)(3,2)成分はゼロ、(3,3)成分は1。）

- 4極磁石

設計軌道が曲率を持たないのでディスパージョンはゼロ。
(ディスパージョンが有限の値を持つのはビームが曲げられる時)

そのかわりに収束の強さがエネルギーに依存
→位相の変化がエネルギーに依存

クロマティシティξ ： $\frac{\Delta p}{p}=1$ の粒子に対する位相の進みの変化$\Delta\psi/2\pi$

K(s)∝1/pより、K(s)→K(s)/(1+Δp/p)≈K(s)(1-Δp/p)の置き換え

運動方程式

$$x'' + K(s)x = K(s)x\frac{\Delta p}{p}$$

摂動論で解く。Δp=0の$s_0 \to s$の転送行列M_0。経路の途中s_1に薄肉レンズがあるとする（これがΔpによって生じた摂動）。

薄肉レンズの強さ$-\Delta k \equiv -K(s)ds_1\Delta p/p$

まずはΔp=0の粒子の位相の進みψ_0

$$M_0 = M^{(2)}M^{(1)} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\psi_0 = \frac{m_{12}}{m_{11}\beta_0 - m_{12}\alpha_0}$$

摂動後の転送行列M

$$M=M^{(2)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \Delta k & 1\end{pmatrix}M^{(1)}=M_0-\begin{pmatrix}M_{12}^{(2)}M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)}\\ \sim & \sim\end{pmatrix}\Delta k\equiv M_0+\Delta M$$

$$\Delta\tan\psi_0=\frac{m_{11}\Delta m_{12}-m_{12}\Delta m_{11}}{(m_{11}\beta_0-m_{12}\alpha_0)^2}\beta_0$$

うまいことαが消える

$$=\frac{(M_{12}^{(2)})^2}{(m_{11}\beta_0-m_{12}\alpha_0)^2}\beta_0\Delta k$$

detM^(1)=1より

$$=\frac{\Delta\psi_0}{cos^2\psi_0}$$

tanの普通の微分

11ページの関係式から

$$m_{11}\beta_0-m_{12}\alpha_0=\sqrt{\beta_0\beta}\cos\psi_0\,,M_{12}^{(2)}=\sqrt{\beta_1\beta}\sin(\psi_0-\psi_1)$$

以上より

$$\Delta\psi_0 = sin^2(\psi_0 - \psi_1)\beta_1\Delta k$$

Δkを代入して積分、Δp/p=1とすればクロマティシティが得られる。

$$\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{s_0}^{s} sin^2\big(\psi(s) - \psi(s_1)\big)\beta(s_1)K(s_1)ds_1$$

ベータ関数の条件式から$\beta K = \gamma + \alpha'$
sin^2は平均値1/2に置き換え。
ベータ関数がsの周期関数の時は

$$\xi = \frac{1}{4\pi}\int_{s_0}^{s}(\gamma + \alpha')ds_1$$

$$\cong \frac{1}{4\pi}\int_{s_0}^{s}\gamma ds_1$$

$$\cong \frac{1}{4\pi}\int_{s_0}^{s}\frac{ds_1}{\beta} = \frac{1}{4\pi}\psi_0$$

4極磁石では α <<1

α'の積分は無視できる

クロマティシティはほぼ光学系全体の位相の進みだけで決まる。

まとめ

- 加速区間以外ではtwissパラメータと位相の変化でビームの状態が記述できる。
- エネルギーが一様でない場合はディスパージョンとクロマティシティを求めることでΔp/pの粒子のずれがわかる。
- 加速区間以外ではエミッタンスは保存する。