加速器ゼミ第3回

Sep 29, 2022

木村 佑斗

1. 加速区間でtwissパラメータは？

運動方程式　$x'' + K(s)x = 0$　に基づいたビームはtwissパラメータを使うと上手く表現できた。

加速区間の運動方程式は

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \,, \qquad p_x = m_0\gamma\beta c\,\frac{dx}{ds} \,, \qquad \frac{d}{dt} = \beta c\,\frac{d}{ds}$$

より、

$$(\beta\gamma x')' = \frac{F_x}{m_0 c^2 \beta} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ (1)$$

となる。

加速区間、特に$F_x = 0$の時、(1)式は両辺sで積分して

$$x'(s) = \frac{\beta_0\gamma_0}{\beta(s)\gamma(s)} x'_0$$

さらに積分して

$$x(s) - x_0 = \beta_0\gamma_0 x'_0 \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)\gamma(s)} \equiv L_{eff} x'_0$$

また、運動量pは$p \propto \beta\gamma$より、

$$\boxed{x(s) = x_0 + L_{eff} x'_0 , \qquad x'(s) = \frac{p_0}{p(s)} x'_0 , \qquad \varepsilon(s) = \frac{p_0}{p(s)} \varepsilon_0 \cdot\cdot\cdot (2)}$$

となる。3つ目の式(エミッタンス)に関しては,

$$\varepsilon(s) \propto \Delta x \Delta x' = \Delta x \Delta\left(\frac{p_x}{p(s)}\right)$$

より、

$$p(s)\varepsilon(s) \propto \Delta x \Delta p_x = const$$

から。

(2)式の変換に従って、加速区間入り口(s=0)でのtwissパラメータがどうなるか。

s=0で

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 {x'}_0 + \beta_0 {x'}_0^2 = \varepsilon_0$$

この式は(2)式によって次式に変換される。すなわち

$$\frac{p_0}{p(s)}\tilde{\gamma}x^2(s) + 2\tilde{\alpha}x(s)x'(s) + \frac{p(s)}{p_0}\tilde{\beta}{x'}^2(s) = \varepsilon(s)$$

$$\begin{cases} \tilde{\gamma} = \gamma_0 \\ \tilde{\alpha} = \alpha_0 - L_{eff}\gamma_0 \\ \tilde{\beta} = \beta_0 - 2L_{eff}\alpha_0 + L_{eff}^2\gamma_0 \end{cases}$$

となる。従って、

$$\gamma(s) \equiv \frac{p_0}{p(s)}\tilde{\gamma}, \qquad \alpha(s) \equiv \tilde{\alpha}, \qquad \beta(s) \equiv \frac{p(s)}{p_0}\tilde{\beta} \cdot\cdot\cdot (3)$$

と定義すればよさそう。

もともとのtwissパラメータの定義は

$$\beta\gamma = 1 + \alpha^2\,, \qquad \alpha = -\frac{\beta'}{2}$$

だった。

前ページで定義した加速区間での「twissパラメータ」はこの式を満たすのか？

$$\beta\gamma = \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1 + \tilde{\alpha}^2 = 1 + \alpha^2$$

となり、ok。γは加速後と加速前で同じ定義で良いことがわかった。

しかし、

$$\alpha = \tilde{\alpha} \neq -\frac{\beta'}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p_0}\tilde{\beta}\right)'$$

となって加速後のαは加速前のαの定義は使えない。加速後と加速前でαは不連続。

加速後のtwissパラメータを非加速区間で扱うことはできない。

そもそも、ベータ関数は$x'' + K(s)x = 0$という微分方程式から出てくるもので、x'（減衰項）を持つ微分方程式ではベータ関数が定義できない。

<u>問題点</u>

(1) (加速区間では)保存量がない。

(2) 加速区間ではベータ関数が定義できない。従って、加速区間を含む輸送系全体をつじつまの合う単一の光学系として扱うことができない。

(3) 従って、オプティクスのマッチング、軌道補正などの計算がしにくい。

マッチングとは？

「マッチング」とは、 ビーム粒子の分布が、ビームラインの設計に合致している状態 。[引用Oho-12]

加速器、輸送管の大きさは有限。

$A(s)$:管の口径

$$\sqrt{\beta(s)\varepsilon(s)} < A(s)$$

を満たす最大のεをアクセプタンスという。

エミッタンスは、
アクセプタンス以内であるべき。

この要請を満たすように
ビームと加速器・輸送管の調節。

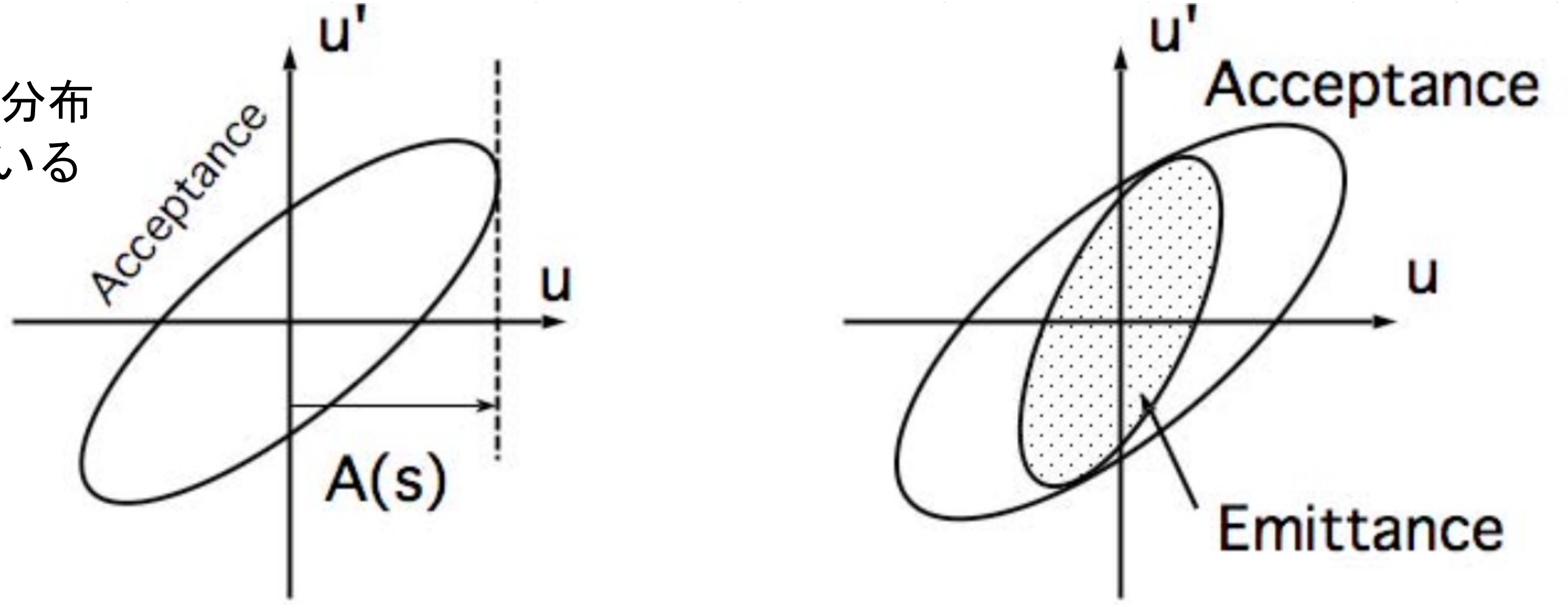

図1 (Oho-07　ビーム輸送の物理 より)

2. 固有座標系

加速区間の非加速区間との一番の違いは$\gamma' \neq 0$である。

解決法：微分にγを含めてしまえば良い。

固有時 $d\tau \equiv \frac{dt}{\gamma} = \frac{ds}{\beta\gamma c}$

こいつを使うと、

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \Leftrightarrow \beta c \frac{d}{ds}\left(m_0 \beta\gamma c \frac{dx}{ds}\right) = F_x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\gamma F_x}{m_0}$$

次元をsに揃えるために

$$d\sigma \equiv c\,d\tau$$

と定義。

x方向の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = \frac{\gamma F_x}{m_0 c^2} \quad ・・・(4)$$

また、s方向(縦方向)の方程式は

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = F_s \beta c \\ E = m_0 c^2 \gamma \end{cases}$$

より

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} = \beta\gamma \frac{F_s}{m_0 c^2} \quad or \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{F_s}{m_0 c^2} \quad ・・・(5)$$

となる。

- 以下、直線軌道で同一エネルギーの場合について考える。

同じ速さ、曲率ゼロなので、固有時τは全粒子共通。つまりσは共通。従って、注目する粒子のσは中心粒子(基準粒子)のσに等しい。

解析手順

(ｉ) 加速電場F_sがsの関数。$\gamma = \gamma(s)$を求める。(5)式より、

$$\gamma(s) = \int \frac{F_s(s)}{m_0 c^2} ds$$

(ⅱ) $d\sigma = \dfrac{ds}{\beta(s)\gamma(s)}$より、$\sigma$と$s$の関係式が出てくる。

(ⅲ) (4)式($F_x = 0$や4極磁石)を解く。いずれの場合も方程式は$\dfrac{d^2x}{d\sigma^2} + K^{(\sigma)}x = 0$の形になる。従って、加速があってもベータ関数が定義できて、全ての光学系で一貫した記述ができる。（上付き添字(σ)、(s)はそれぞれσ-座標系、s-座標系を表す。）

4極磁石と加速が同時にあってもベータ関数が定義できる。

- 加速区間$(F_x = 0)$　　　　$\left(\ \dot{}\ \equiv \frac{d}{d\sigma}\ \right)$

$$\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 \Leftrightarrow \beta\gamma \frac{dx}{ds} = \dot{x}_0 \Leftrightarrow x(s) - x_0 = \dot{x}_0 \int_0^s \frac{ds}{\beta\gamma}$$

$$\frac{d}{d\sigma} = \beta\gamma \frac{d}{ds}$$

$$l_{eff} \equiv \int_0^s \frac{ds}{\beta\gamma}$$

$$\beta\gamma x' = \beta_0\gamma_0 x'_0 \Leftrightarrow x(s) - x_0 = \beta_0\gamma_0 l_{eff}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l_{eff} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$$

σ-座標系⇄s-座標系

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_0\gamma_0 l_{eff} \\ 0 & \dfrac{\beta_0\gamma_0}{\beta\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}}$$

(2)式そのもの

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{F_s(s)}{m_0 c^2} \Rightarrow \gamma(s) = \int \frac{F_s(s)}{m_0 c^2} ds$$

- 4極磁石($F_s = 0\ , F_x = -evB_y = -e\beta c b_1 x$)

まず$\gamma' = 0$より$\gamma = const\ ,\ \ \beta = const$

$$\ddot{x} = \frac{\gamma F_x}{m_0 c^2} = -\frac{\beta\gamma e b_1}{m_0 c}x \equiv -K^{(\sigma)}x$$

$$\frac{d}{d\sigma} = \beta\gamma\frac{d}{ds}$$

$$x'' = \frac{F_x}{m_0 c^2\beta^2\gamma} = -\frac{e b_1}{m_0 c\beta\gamma}x \equiv -K^{(s)}x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K^{(\sigma)}}\sigma & \dfrac{\sin\sqrt{K^{(\sigma)}}\sigma}{\sqrt{K^{(\sigma)}}} \\ -\sqrt{K^{(\sigma)}}\sin\sqrt{K^{(\sigma)}}\sigma & \cos\sqrt{K^{(\sigma)}}\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$$

この場合、$K^{(\sigma)} = (\beta\gamma)^2 K^{(s)}$

3. 固有座標系でのεとベータ関数

- 規格化エミッタンス: $\varepsilon_n \equiv \varepsilon^{(\sigma)}$

σ-座標系では加速ゼロとみなせるのでε_nは保存量。

$$\begin{cases} \varepsilon^{(s)} \propto \Delta x \Delta x' \\ \varepsilon^{(\sigma)} \propto \Delta x \Delta \dot{x} \\ \dot{x} = \beta\gamma x' \end{cases}$$

より

$$\varepsilon^{(\sigma)} = \beta\gamma\varepsilon^{(s)}$$

- <u>ベータ関数</u>

ベータトロン振動の位相の進み$\Delta\psi$は座標系に依らないので、

$$\Delta\psi = \int \frac{ds}{\beta^{(s)}} = \int \frac{d\sigma}{\beta^{(\sigma)}} = \int \frac{ds}{(\beta\gamma)\beta^{(\sigma)}}$$

よって、

$$\beta^{(\sigma)} = \frac{\beta^{(s)}}{\beta\gamma}$$

また、

$$\alpha^{(\sigma)} \equiv -\frac{1}{2}\frac{d\beta^{(\sigma)}}{d\sigma} = -\frac{\beta\gamma}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta^{(s)}}{\beta\gamma}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\beta'^{(s)} + \frac{1}{2}\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma}\beta^{(s)}$$

となるが、そもそも$(\beta\gamma)' \neq 0$の時は$\alpha^{(s)}$を定義できなかったので$\alpha^{(\sigma)}$と$\alpha^{(s)}$を比較できない。 $\alpha^{(\sigma)}$と$\alpha^{(s)}$の関係式が得られるのは$(\beta\gamma)' = 0$の時のみ。この時は

$$\alpha^{(\sigma)} = \alpha^{(s)}$$

従って、

$$\gamma^{(\sigma)} \equiv \frac{1+\alpha^{(\sigma)^2}}{\beta^{(\sigma)}} = (\beta\gamma)\frac{1+\alpha^{(s)^2}}{\beta^{(s)}} = (\beta\gamma)\gamma^{(s)}$$

となる。

これら３つの関係式は(3)式にそれぞれ対応している。

$$(\text{復習})\ \gamma(s) \equiv \frac{p_0}{p(s)}\tilde{\gamma},\ \alpha(s) \equiv \tilde{\alpha},\ \beta(s) \equiv \frac{p(s)}{p_0}\tilde{\beta} \cdot\cdot\cdot (3)$$

（チルダ付きがσ-座標系のtwissパラメータに対応。チルダ付きは長さL_{eff}の自由空間によって変換を受けたもの。固有座標に移ることで、加速区間が自由空間のように扱える。）