

宇宙創成物理学概論 第 11 回 レポート

C3SM2016 木村佑斗

2023 年 8 月 4 日

自然単位系で考え、最後に MKS 単位に直す。

1

まずは中性子星の静水圧平衡を考える。すなわち、

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2}M(r)\rho(r) \quad (1)$$

中性子星の密度を一定と仮定 ($\rho(r) = \rho_0$) すると、質量 $M(r)$ は

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 \quad (2)$$

となる。後のために r^2 を求める。(2) 式より

$$r^2 = \left(\frac{3M(r)}{4\pi\rho_0}\right)^{2/3} \quad (3)$$

となる。(1) 式を積分することで圧力 $P(r)$ を得る。即ち、積分定数を C として、

$$\begin{aligned} P(r) &= \int -\frac{4\pi}{3}Gr\rho_0^2dr \\ &= -\frac{G}{2}\frac{4\pi}{3}r^2\rho_0^2 + C \\ &= -\frac{G}{2}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}M^{2/3}\rho_0^{4/3} + C \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)GM^{2/3}(m\rho_n)^{4/3} + C \end{aligned} \quad (4)$$

ここで第 2 式から第 3 式へは (3) 式を、第 4 式へは $\rho_0 = m\rho_n$ を用いた。ここで m, ρ_n はそれぞれ中性子 1 個の質量、中性子星内部の中性子の数密度である。

次に中性子の縮退圧を考える。Fermi gas model においては中性子の Fermi 運動量は

$$p_F = (3\pi^2\rho_n)^{1/3} \quad (5)$$

である。中性子星が中性子だらけの時の密度は原子核とほぼ等しい。原子核の数密度は $\rho_{nucl} \simeq 0.17\text{fm}^{-3}$ より [1]、 $p_F \simeq 330\text{MeV}$ となる。図 1 は $E_{tot} = \sqrt{p^2 + m^2}$ のグラフである。中性子の質量として $m = 1000\text{MeV}$ と概算している。中性子がメインの中性子星の密度が原子核とほぼ等しいなら p は超相対論的領域には入らない。しかし、ここでは密度の上限をあまり気にせず、 p が超相対論的領域に入ることを考える。まずは平均の運動エネルギーを求める。

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{p_F} (\sqrt{p^2 + m^2} - m)p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} \quad (6)$$

図 1 より、Fermi 運動量が超相対論的領域に入っていれば、非相対論的領域の積分も超相対論的領域の積分とみなせる。よって、

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\int_0^{p_F} p^3 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} \\ &= \frac{3}{4}p_F \end{aligned} \quad (7)$$

したがって、全運動エネルギーは

$$E = N \times \bar{E} = \frac{3}{4}p_F N \quad (8)$$

となる。すると中性子の縮退圧は

$$\begin{aligned} P &= -\frac{dE}{dV} \\ &= -\frac{3}{4}(3\pi^2)^{1/3}\rho_n^{4/3} \end{aligned} \quad (9)$$

静水圧平衡から導いた圧力と、縮退圧の傾きが等しい時の M, N が中性子星の最大質量と最大中性子数である。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}GM_{max}^{2/3}m^{4/3} &= \frac{3}{4}(3\pi^2) \\ \Leftrightarrow M_{max} &= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{27\pi}{8}}\left(\frac{1}{Gm^2}\right)^{3/2}m \end{aligned} \quad (10)$$

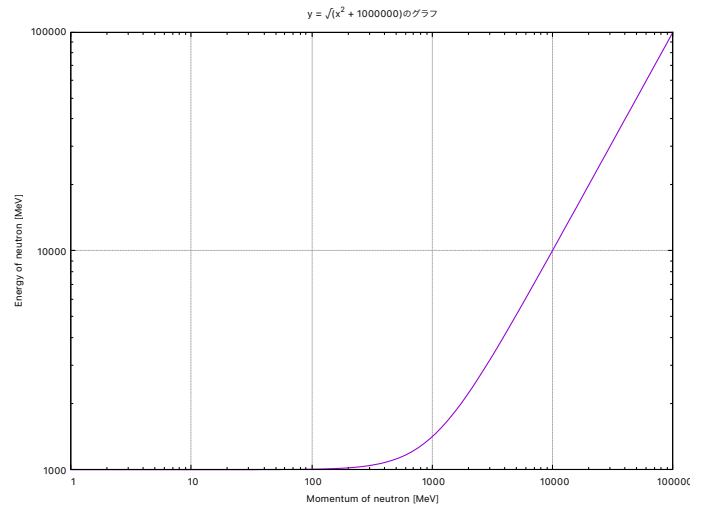


図 1 運動量とエネルギーの関係

次に万有引力定数を MeV と c と fm で表す。

$$\begin{aligned} 1\text{J} &= 1\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \simeq 6 \times 10^{-12}\text{MeV} \\ 1\text{m/s} &= (3 \times 10^8)^{-1}c \\ 1\text{m} &= 10^{15}\text{fm} \end{aligned} \quad (11)$$

より、 c は 1 なので省略すると、

$$G \simeq 7 \times 10^{-11} \times \frac{1}{6 \times 10^{12}} \times \frac{1}{(3 \times 10^8)^4} \times 10^{15} \text{MeV}^{-1} c^4 \text{fm} \\ \simeq 1.5 \times 10^{-42} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{fm} \quad (12)$$

と変換できる。以上より、最大中性子数 N_{max} は

$$N_{max}^{NS} \simeq 5 \times \left(\frac{200 \text{MeV} \cdot \text{fm}}{1.5 \times 10^{-42} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{fm} \times 10^6 \text{MeV}^2} \right)^{3/2} \\ \simeq 5 \times 10^{-57} \sim 3.5 M_{\odot} \quad (13)$$

となる。ただし、中性子の質量を 1GeV として計算した。

白色矮星の最大質量を求めるためには、これまで議論していたものの中の m を電子の質量に変えればいだけである。(電子の縮退圧で星を保っているのが白色矮星なので。) したがって、

$$N_{max}^{W.D} \simeq 5 \times \left(\frac{200 \text{MeV} \cdot \text{fm}}{1.5 \times 10^{-42} \text{MeV}^{-1} \cdot \text{fm} \times 0.5^2 \times 10^6 \text{MeV}^2} \right)^{3/2} \\ \simeq 8 \times N_{max}^{NS} \quad (14)$$

よって、

$$M_{max}^{W.D} \simeq 4 \times M_{max}^{NS} \quad (15)$$

となる。しかし、実際には白色矮星の質量は約 $0.1 M_{\odot} \sim 1.4 M_{\odot}$ である [2]。これは中性子星の最大質量がおよそ $1.7 M_{\odot}$ であることと矛盾している。なぜこのような矛盾が生じたかについて議論する。電子はある程度まで高密度になると、陽子と反応して中性子になってしまった方が安定なので、限界質量の前に限界の密度がある。閉じ込めの距離がおよそ 160fm になると、 $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ が起きる。数密度で比較すると原子核密度の約 10^{-5} 倍である。このような理由から、白色矮星の最大質量は上と同様の議論は使えないことがわかった。

2

いま、 n と Λ は質量が等しく、電気的性質も等しく、違うのはアイソスピンだけである。thermal equilibrium が成立してからは、Fermi gas model ではもはやこの状況は spin $3/2$ のフェルミオンの場合と等価である。したがって spin 縮退度 4 として中性子メインの中性子星の最大質量と同じ計算をすれば良い。まず、fermi 運動量 p_F が $(1/2)^{1/3}$ 倍される。その影響が (10) 式の上の右辺まで残る。最終的に、最大質量は $\sqrt{2}$ 倍される。

以上より、この仮定とモデルでは最大質量は

$$M_{max}^{n,\Lambda} \sim 5 M_{\odot} \quad (16)$$

となる。

3

中性子星の内部コアは strange nuclear matter であり、中心部は strange quark matter であるとする、連続的に変化しそうなのでその境界は定義できない気がする一方、ハドロン自由度からクォークの自由度への変化は連続ではありえない気がします。もしこの境界についての知識が得られれば、初期宇宙のクォーク・グルーオン・プラズマ状態から温度が冷えてハドロンの宇宙になった過程が理解できそうです。

参考文献

- [1] 素粒子・原子核物理入門 B・ポッフ
- [2] 相対論と宇宙の事典 安東正樹 白水徹也